

Problème:

"Polynôme caractéristique"

1) caract $\in I$

a) λ v.p. de $A \Leftrightarrow \exists X_0 \in \pi_n(K) \setminus \{0\} \text{ s.t. } AX_0 = \lambda X_0 \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X_0 = 0$

$\Leftrightarrow 0 \neq X_0 \in \ker(A - \lambda I_n)$
 $\Leftrightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas injective
 $\Leftrightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

b) D'après a) $\lambda \in S_P(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas inversible
 $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$
 $\Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda$ racine de P_A .

$\exists A \in M_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $P_A(X) \in \mathbb{C}[X]$.

Comme dans $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme admet au moins une racine (Moulin).

Alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ s.t. $P_A(\lambda_0) = 0$
 Alors d'après b) $\lambda_0 \dots$
 $\Leftrightarrow S_P(A) \neq \emptyset$

$$1) \quad \pi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_\pi(x) = \det(xI_2 - \pi) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

Alors $S_\mathbb{C}(\pi) = \{xi, -xi\}$
 $S_{\mathbb{R}}(\pi) = \emptyset$

A est inversible $\Leftrightarrow A - 0I_n$ inversible
 $\Leftrightarrow 0$ n'est pas v.p. de A
 $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$ s.t. $A = PBP^{-1}$

$$P_A(x) = \det(xI_n - A) = \det(xI_n - PBP^{-1})$$

$$= \det(P(xI_n - B)P^{-1})$$

$$= \det P \det(xI_n - B) \det P^{-1}$$

$$= \det(xI_n - B)$$

$$= P_B(x)$$

D'après 1/ $\lambda \in S_{P_K}(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$
 $\Leftrightarrow P_B(\lambda) = 0$
 $\Leftrightarrow \lambda \in S_{P_K}(B)$
 D'où $S_{P_K}(A) = S_{P_K}(B)$

$$4) H = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$a) P_H(X) = \det(XI_3 - H)$$

$$= \begin{vmatrix} X+3 & -2 & -1 \\ -2 & X & -2 \\ -1 & -2 & X+3 \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 = \begin{vmatrix} X+4 & 0 & -X-4 \\ -2 & X & -2 \\ -1 & -2 & X+3 \end{vmatrix}$$

$$= (X+4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & X & -2 \\ -1 & -2 & X+3 \end{vmatrix}$$

$$C_3 \leftarrow C_3 + C_1 = (X+4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & X & -4 \\ -1 & -2 & X+2 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la 1^{ère} colonne

$$P_H(X) = (X+4) (X(X+2) - 8)$$

$$= (X+4) (X^2 + 2X - 8)$$

$$P_H(X) = (X+4) (X+4) (X-2)$$

$$= (X+4)^2 (X-2)$$

$$\Delta^0 p \text{ de } H \Leftrightarrow P_H(X) = 0, \text{ d'où}$$

$$SP_H(H) = \{-4, 2\}$$

c) On a Orient pour φ . L'endomorphisme π est inversible.

$$\text{On a } P_H(0) = \det(-H) = (-1)^3 \det H$$

$$= -\det H$$

$$\text{Or } P_H(0) = -3^2$$

$$\Rightarrow \frac{\det H}{\det \pi} = 3^2$$

$$d) N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puisque $L_1 = L_2 = L_3$, alors $\text{rg } N = 1$.

$$\Leftrightarrow \dim \text{Im } N = 1.$$

D'après le th du rang $\dim \ker N = 2$.

Ce qui montre que N n'est pas inversible

d'où 0 est une v.p de N

$$e) P_N(X) = \det(XI_3 - N)$$

$$= (-1)^3 \det(N - XI_3)$$

$$= - \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

$$= - \begin{vmatrix} 3-X & 3-X & 3-X \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 3-X & 3-X & 3-X \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix}$$

$$= (x-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\Rightarrow P_N(x) = (x-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$P_N(x) = (x-3)x^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \det(xI_n - A)$$

$$= \begin{vmatrix} xI_k - B & -C \\ 0 & xI_p - 0 \end{vmatrix}$$

$$= \det(xI_k - B) \cdot \det(xI_p - 0)$$

$$= P_B(x) \cdot P_D(x)$$

$$D'ou: P_B(x) \text{ divise } P_A(x)$$

$$\text{Soit } \lambda \in \text{Sp}_K(B) \Leftrightarrow \text{Propriété de}$$

$$P_B \Leftrightarrow P_B(\lambda) = 0$$

$$D'après on déduit $P_A(\lambda) = 0$$$

$$\Rightarrow \lambda \in \text{Sp}_K(A)$$

$$\text{Ainsi } \text{Sp}_K(B) \subset \text{Sp}_K(A)$$

Partie II

1) Soit B' une base de E , alors

$$M(U, B') = P_{B' \rightarrow B} \cdot M(U, B) \cdot P_{B \rightarrow B'}$$

$$= P_{M(U, B)} \cdot P^{-1} \quad (P = P_{B' \rightarrow B})$$

$$\Leftrightarrow \det(M(U, B')) = \det(M(U, B)) \det(P^{-1})$$

$$\text{alors } \det(M(U, B')) = \det M(U, B).$$

$$2) U(F) \subset F$$

$$U_F: F \rightarrow F$$

$$x \mapsto U_F(x) = U(x)$$

$$\forall x \in F, U_F(x) \in F$$

Alors U_F est un endomorphisme de F .

$$3) E = F \oplus G, \text{ avec } \dim F = k.$$

On considère $B' = B_1 \cup B_2$

avec B_1 est une base de F , $(B_1 = (e_1, \dots, e_k))$
et B_2 " " de G , $(B_2 = (e_{k+1}, \dots, e_n))$

$$M(U, B') =$$

$$\begin{pmatrix} U(e_1) & \dots & U(e_k) & U(e_{k+1}) & \dots & U(e_n) \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$V \quad 1 \leq i \leq k;$

$e_i \in F \Rightarrow U(e_i) \in \mathbb{F}_n$

$\text{red}(e_1, \dots, e_k)$

1) Si λ n'est pas de $U_F \Leftrightarrow P_{U_F}(\lambda) = 0$

divise $P_U(\lambda)$, alors

$P_U(\lambda) = 0. \Rightarrow \lambda$ n'est pas de U

2) Si F est G sont diagonales par U

On considère $B'' = (B_1, B_2)$

Puisque F est diagonale $\Rightarrow U(B_1) \in \text{Vect}(B_1)$

et G " " $\Rightarrow U(B_2) \in \text{Vect}(B_2)$

$\Rightarrow \Pi(U, B) =$

$U(B_1)$	$U(B_2)$	
A_1	O	B_1
O	A_2	B_2