

$$= (t-1)(t-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & t+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (t-1)^2 (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & t+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-t)^2 (-1 - t - 1)$$

$$= (1-t)^2 (-2-t)$$

$\Rightarrow \det_{B_C}(e_1, e_2, e_3) = -(2+t)(1-t)^2$

$\underline{\underline{cf}} (e_1, e_2, e_3)$ forme une base

ssi $t \neq -2$ et $t \neq 1$

Exercice 3

$$\Rightarrow D_{n+2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{vmatrix}$$

on développe par rapport à la 1^{re} colonne

$D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 1 & 0 & \dots \\ 2 & 3 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{vmatrix}$

$\leftarrow$ coeff $(n+1)$

on développe par rapport à la 1^{re} ligne

③

Alex $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$ vérifie une récurrence

2) la suite $(D_n)_{n \geq 1}$ vérifie une récurrence d'ordre 2. L'équation caractéristique associée :

$$v^2 - 3v + 2 = 0 \quad \text{ou } v_0 = 2.$$

$$\Rightarrow v_1 = 1 \quad \text{ou } v_0 = 2.$$

$$\text{Ainsi } D_n = \alpha v_1^n + \beta v_0^n$$

$$= \alpha + \beta 2^n, \quad \forall n \geq 1$$

Pour $n=1 \Rightarrow D_1 = 3$

$n=2 \Rightarrow D_2 = 7$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha + 4\beta = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = 3 - 4 = -1$$

$$\text{Ainsi } D_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2}$$

Exercice 4

$$A \in M_n(\mathbb{C})$$

$$\text{Soit } P(X) = \det(A + X I_n)$$

Alors P est un polynôme de degré inférieur ou égale à n et par suite il admet au plus n racines (un nombre fini de racines).

En déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tq

hg $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $0 < |x| < \alpha$, on a
 $P(x) \neq 0$ (on peut choisir α hg.
 $\alpha < \inf \{ |x| : P(x) = 0 \}$
 (on choisit P)

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ avec $0 < \varepsilon < \alpha$: $P(\varepsilon) \neq 0$
 $\det(A + \varepsilon I_n) \neq 0$

$\Leftrightarrow A + \varepsilon I_n$ invertible

Exercice 5

1) $A = P^{-1}BP$
 $P \in \Gamma_n(\mathbb{Q}) \Leftrightarrow P = Q + iR$
 $Q, R \in \Gamma_n(\mathbb{R})$

2) On a $PA = BP$

$\Leftrightarrow (Q + iR)A = B(Q + iR)$
 $\Leftrightarrow QA = BQ$ et $RA = BR$

3) $H(x) = \det(Q + xR)$
 H est un polynôme. $\Rightarrow H \neq 0$

4) $H(i) = \det(P) \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ hg $H(\lambda) \neq 0$

5) $H \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ hg $H(\lambda) \neq 0$

6) Soit $\tilde{P} = Q + \lambda R$
 $\det(\tilde{P}) = H(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \tilde{P}$ est invertible.

(11)

De plus on a:
 $QA = BQ$
 $RA = BR$
 $\Rightarrow (Q + \lambda R)A = B(Q + \lambda R)$
 $\Leftrightarrow \tilde{P}A = B\tilde{P}$

$\Leftrightarrow A = \tilde{P}^{-1}B\tilde{P}$
 et B semblable dans $\Gamma_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6

$V(d_1, d_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = d_2 - d_1$

$V(d_1, d_2, d_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$

$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 =$

$= \begin{vmatrix} d_1 - d_2 & 1 & 1 \\ d_1^2 - d_2^2 & d_2 & d_3 \\ d_1 + d_2 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3 = \begin{vmatrix} d_1 - d_3 & 0 & 1 \\ d_1^2 - d_3^2 & d_2 - d_3 & d_3 \\ d_1 + d_3 & d_2 + d_3 & d_3 \end{vmatrix}$
 $= (d_1 - d_3)(d_2 - d_3)$

$\begin{vmatrix} d_1 - d_2 & 1 & 1 \\ d_1^2 - d_2^2 & d_2 & d_3 \\ d_1 + d_2 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$

indépendance par rapport à la 1^{ère} ligne.

$$V(d_1, d_2, d_3) = (d_1 - d_2)(d_2 - d_3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ d_1 + d_2 & d_2 + d_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow = (d_1 - d_2)(d_2 - d_3)(d_3 - d_1)$$

$$V(d_1, d_2, d_3) = (d_3 - d_1)(d_3 - d_2)(d_2 - d_1)$$

$$2) P(X) = V(d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, X)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{n-1} \\ d_1^2 & d_2^2 & \dots & d_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1^{n-1} & d_2^{n-1} & \dots & d_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on peut écrire.

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

$$\text{avec } a_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ d_1 & & & \\ d_1^{n-2} & & & \\ \vdots & & & \\ d_1^{n-1} & & & \end{vmatrix}$$

$$a_{n-1} = V(d_1, \dots, d_{n-1})$$

b) On démontre que, $1 \leq k \leq n-1$

$$P(d_k) = 0 \quad \left(\text{car la } k^{\text{ème}} \text{ colonne} \right)$$

$$\Rightarrow V(1 \leq k \leq n-1, d_k) \text{ n'est pas la même colonne}$$

$$\Rightarrow P(X) = a_{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (X - d_k)$$

$$P(X) = V(d_1, \dots, d_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (X - d_k)$$

$$\Rightarrow P(d_n) = V(d_1, \dots, d_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (d_n - d_k)$$

$$V(d_1, \dots, d_n) = V(d_1, \dots, d_{n-1}) \prod_{k=1}^{n-1} (d_n - d_k)$$

3) Par récurrence.

$$\text{Pour } n=2: V(d_1, d_2) = d_2 - d_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (d_j - d_i)$$

vérifier.

Soit $n \geq 2$. Supposons l'énoncé est vrai à l'ordre n et montrons à l'ordre $n+1$.

D'après 2-b/

$$V(d_1, d_2, \dots, d_{n+1}) = V(d_1, \dots, d_n) \prod_{k=1}^n (d_{n+1} - d_k)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (d_j - d_i) \prod_{k=1}^n (d_{n+1} - d_k)$$

(d = n+1)

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Ainsi $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\alpha_j - \alpha_i)$.

2) $\varphi: \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$P \longmapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$$

Il y a un isomorphisme.

1^{re} méthode

φ est linéaire.

$\ker \varphi = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]; \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}^n}\}$

$0'_{\mathbb{R}^n} \in \ker \varphi \iff P(\lambda_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow P$ admet n racines réelles $\neq$

Alors $\deg P \leq n-1 \iff \ker \varphi = \{0\}$

$\iff \varphi$ est injective.

D'autre part $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^n = n$

Alors φ est bijective $\Rightarrow$

φ est un isomorphisme.

2^{de} méthode

On considère $B = (1, X, \dots, X^{n-1})$

et $B' = (e_1, \dots, e_n)$ les bases canoniques

respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^n$.

Alors $\pi(\varphi, B, B') =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det \pi(\varphi, B, B') = V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$

car les $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont réels $\neq$
On en déduit que $\pi(\varphi, B, B')$ est inversible
et par suite φ est bijective.

Exercice 7

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$1 \quad 0 \quad \dots \quad a_{n-1}$$

1) Pour calculer $\det C_P$, on développe
selon la 1^{re} ligne, alors

$$\det C_P = (-1)^{n+1} (-a_0) = a_0$$

$\Rightarrow \det C_P \neq 0 \iff a_0 \neq 0$

Si C_p est inversible, si $a_0 \neq 0$.

2) $\det(XI_n - C_p) = \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix} \quad P(0) \neq 0$

On développe par rapport à la dernière colonne.

$$= (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} a_1 \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{2n} (X + a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= a_0 + a_1 X + \dots + (X + a_{n-1}) X^{n-1} = P(X)$$

Autrement

Alors $L_n \leftarrow L_1 + X L_2 + X^2 L_3 + \dots + X^{n-1} L_n$

$\det(XI_n - C_p) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix} \quad P(X)$

On développe selon la dernière colonne.

$$= (-1)^{n+1} P(X) \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = P(X)$$

3) a) $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E

$f(x_0) \in E$, alors il s'écrit dans la base B sous la forme.

$$f(x_0) = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \alpha_2 f^2(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0)$$

$\Rightarrow \pi(f, B) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) f est un endomorphisme, si et seulement si $\pi(f, B)$ est inversible SS .

$$\det(\pi(f, B)) \neq 0.$$

On remarque que $\pi(f, B)$ est une matrice carrée associée au polynôme

$$Q(X) = X^n - \alpha_{n-1} X^{n-1} - \dots - \alpha_0.$$

$$\Leftrightarrow \pi(f, B) = C_Q.$$

$$\text{D'après 1) } \det(\pi(f, B)) = \det C_Q$$

$$= Q(0) = -\alpha_0$$

Ainsi f est un automorphisme $\Leftrightarrow \alpha_0 \neq 0$

Exercice 8

$$(\S_1): \begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -x+y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow AX = b \text{ avec}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2 \neq 0 \quad (A = \text{inv. exerce 1})$$

Alors $(\S_1)$ est un système de Cramer.

On déduit que

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \det A$$

$$\text{Alors } \det C = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -3 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{3+4+6-1}{-2} = -\frac{18}{2} = -9$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -9}$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \det A$$

$$\boxed{y = -6}$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \det A = -\frac{3-6-2+1-2-12}{-2}$$

$$\boxed{z = 12}$$

Exercice 9

$$(\S): \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y - z = 0 \\ -2x - (3+\lambda)y + 3z = 0 \\ x + y - (2+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$(\S) \Leftrightarrow AX = 0 \text{ avec}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -(3+\lambda) & 3 \\ 1 & 1 & -(2+\lambda) \end{pmatrix}$$

Exercice 5

1) $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$

$\Leftrightarrow \text{Mat}(P, B) = \begin{pmatrix} c & b & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$XP(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX \Leftrightarrow$

$\text{Mat}(XP, B) = \begin{pmatrix} 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$P'(X) = 3X^2 + 2aX + b \Leftrightarrow \text{Mat}(P', B) = \begin{pmatrix} b & 2a & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Mat}(XP', B) = \begin{pmatrix} 0 & b & 2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Mat}(X^2P', B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $D(P) = \det_B(P, XP, P', X^2P') =$

$$\begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 2a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La famille (P, XP, P', X^2P') est liée

$\Rightarrow \det_B(P, XP, P', X^2P') = 0 \Leftrightarrow D(P) = 0$

Si $D(P) = 0 \Leftrightarrow$ la famille (P, XP, P', X^2P')

est liée $\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C}$ non tous nuls

$\alpha_1 P + \alpha_2 XP + \alpha_3 P' + \alpha_4 X^2P' = 0$
 $\Leftrightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 X)P + (\alpha_3 + \alpha_4 X + \alpha_5 X^2)P' = 0$

$\Rightarrow \exists U \in \mathbb{C}[X], V \in \mathbb{C}[X] \text{ tq } \deg U \leq 1$
 $\text{et } \deg V \leq 2.$

Supp que $U = \tilde{0} \Rightarrow V \cdot P' = 0 \Rightarrow V = \tilde{0}$ car $P' \neq 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

car $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ non tous nuls de $\text{mat} \text{ lin } V = \tilde{0}.$

Ce qui montre que U et V ne sont pas

4) On a $\deg P = 3.$

Supposons que P admet 3 racines simples $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow P(x_i) = 0$ et $P'(x_i) \neq 0$

Puisque $U(x_i) + V(x_i)P'(x_i) = 0$

$\Rightarrow V(x_i)P'(x_i) = 0$ or $P'(x_i) \neq 0$

$\Rightarrow V(x_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$

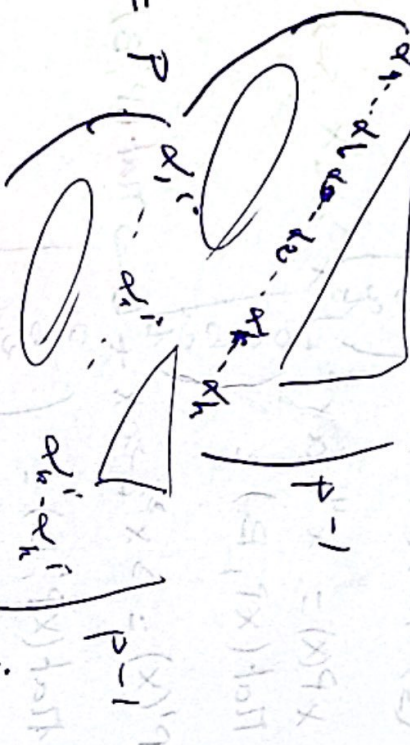
car $\deg V \leq 2 \Rightarrow V = \tilde{0}$ car P admet au moins une racine multiple.

Exercice 4 "Déterminant de Vandermonde"

Appel.

$$\pi \in \Pi_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists P \in \mathcal{G}_n(\mathbb{C}) \text{ tq}$$

$$\pi = P$$



$$\Rightarrow \pi^i = P$$

$$\Rightarrow \text{tr}(\pi^i) = n_1 \alpha_1^i + n_2 \alpha_2^i + \dots + n_k \alpha_k^i$$

$$\text{Ann: } \text{tr}(\pi^i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$n_1 \alpha_1^i + \dots + n_k \alpha_k^i = 0$$

$$(\S) \left\{ \begin{array}{l} n_1 \alpha_1^k + \dots + n_k \alpha_k^k = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{si } \text{tr}(\pi^i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{si } \text{tr}(\pi^i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{si } \text{tr}(\pi^i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{si } \text{tr}(\pi^i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^k \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k^1 & \alpha_k^2 & \dots & \alpha_k^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } \forall i, \alpha_i \neq 0$$

$$\text{ona } S \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \det A = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k \cdot V(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$$

$$= \prod_{i=1}^k \alpha_i \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\alpha_i - \alpha_j)$$

$$\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow A \text{ inversible. } \Rightarrow$$

$$n_1 = n_2 = \dots = n_k = 0 \text{ ce qui est impossible}$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_{i_0} = 0$$

qu'il faut à nouveau à chaque fois la loi du système, on peut déduire que

$$\forall i, \alpha_i = 0$$

Exercice 7 "Déterminant de Cauchy"

1.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

On a $a_i = a_i$ et $i \neq j$

Alors les deux lignes L_i et L_j sont égales

D'où $\Delta_n = 0$

2.

$$\left(\prod_{1 \leq i \leq n-1} (x-b_i) \right) \wedge \left(\prod_{1 \leq k \leq n} (x+a_k) \right) = 1 \quad ?$$

$$(x-b_1)(x-b_2) \dots (x-b_{n-1}) (x-b_n) (x+a_1) \dots (x+a_n) = 1$$

$$\Rightarrow (x-b_1)(x-b_2) \dots (x-b_{n-1}) (x-b_n) (x+a_1) \dots (x+a_n) = 1$$

$$\text{D'où } \left(\prod_{1 \leq i \leq n-1} (x-b_i) \right) \wedge \left(\prod_{1 \leq k \leq n} (x+a_k) \right) = 1$$

Remarque :

Les polynômes $\left(\prod_{1 \leq i \leq n-1} (x-b_i) \right)$ et $\left(\prod_{1 \leq k \leq n} (x+a_k) \right)$ sont adjoints et n'ont aucune racine commune.
 ① Donc ils sont premiers entre eux

$$R(x) = \frac{\prod_{1 \leq i \leq n-1} (x-b_i)}{\prod_{1 \leq k \leq n} (x+a_k)}$$

Pour tout $1 \leq k \leq n$, $(-a_k)$ est une racine de $\prod_{1 \leq k \leq n} (x+a_k)$ et n'en est pas pour $\prod_{1 \leq i \leq n-1} (x-b_i)$.

D'où les pôles de $R(x)$ sont les $(-a_k)$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

En plus, ils sont tous simples car tous racines simples de $\prod_{1 \leq k \leq n} (x+a_k)$.

$$R(x) = \frac{\prod_{1 \leq i \leq n-1} (x-b_i)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (x+a_j)} \in \mathbb{R}(x) \text{ et } d(R) = -1 < 0$$

ou plus tous les pôles $(-a_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont simples

Alors la décomposition en éléments simples est de la forme :

$$R(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{x+a_k} \quad (12)$$

$$R(x) = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - b_j)}{\prod_{1 \leq j \leq n} (x + a_j)} = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{x + a_k}$$

(12)

Soit $1 \leq k \leq n$, $\alpha_k = ?$

Multiplication dans (12) par $(x + a_k)$: deux fractions +endre X vers $(-a_k)$ on obtient :

$$\alpha_k = \frac{\prod_{1 \leq j \leq n-1} (-a_j - b_j)}{\prod_{1 \leq j \leq n, j \neq k} (-a_k + a_j)} = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (a_k + b_j)}{(-1)^{n-1} \prod_{j=1, j \neq k}^n (a_k - a_j)}$$

c/c :

$$\forall 1 \leq k \leq n, \alpha_k = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (a_k + b_j)}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (a_k - a_j)}$$

3

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

Notons $L'_1, \dots, L'_n$ les lignes :

$$\text{Notons } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

La dernière ligne est :

$$\left[\frac{\alpha'_1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{\alpha'_n}{a_1+b_n} \right] \dots \left[\frac{\alpha'_1}{a_2+b_1} + \dots + \frac{\alpha'_n}{a_2+b_n} \right] \\ = \alpha'_1 \underbrace{\left(\frac{1}{a_1+b_1} + \dots + \frac{1}{a_1+b_n} \right)}_{L'_1} + \dots + \alpha'_n \underbrace{\left(\frac{1}{a_n+b_1} + \dots + \frac{1}{a_n+b_n} \right)}_{L'_n}$$

$$= \alpha'_1 L'_1 + \dots + \alpha'_n L'_n$$

Avec $L_n \leftarrow L_n - (\alpha'_1 L'_1 + \dots + \alpha'_n L'_n)$ donc le déterminant Δ on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \alpha_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \alpha_n \Delta_n} \quad \text{CQFD}$$

4

$$(\alpha_n \alpha_n \Delta_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\partial_1 R(b_1) = \dots = R(b_{n-1}) = 0$$

$$\Delta_n \alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

On développe avant la dernière ligne, on a :

$$\alpha_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$$

5

$$(i) \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_1)} - \frac{1}{(a_1+b_2)(a_2+b_2)}$$

$$= \frac{(a_2+b_1)(a_1+b_2) - (a_2+b_2)(a_1+b_1)}{(a_1+b_1)(a_2+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_2)}$$

$$\Delta_2 = \frac{a_2 b_2 + a_1 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_2}{(a_1 + b_2)(a_2 + b_2)(a_2 + b_2)}$$

(ii) M que:

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$.

Initialisation: Pour $n = 2$

$$\Delta_2 = \frac{(a_2 - a_1)b_2 + (a_2 - a_1)b_2}{(a_1 + b_2)(a_2 + b_2)(a_2 + b_2)}$$

$$= \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_2)}{(a_1 + b_2)(a_2 + b_2)(a_2 + b_2)}$$

$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_i - a_j)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (a_i + b_j)}$$

Hérédité:

Soit $n \geq 2$.

Supposons que

$$\Delta_{n-1} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i + b_j)}$$

On montre que

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + b_j)}$$

On a:

$$\Delta_n = \frac{R(b_n)}{a_n} \Delta_{n-1}$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (b_n - b_j)}{\prod_{k=1}^n (b_n + a_k)} \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j)(b_j - b_i)}{\prod_{j=1}^{n-1} (a_n + b_j)} \cdot \Delta_{n-1}$$

$$\stackrel{H.R.}{=} \frac{\left(\prod_{j=2}^{n-1} (b_n - b_j)(a_n - a_j) \right)}{\prod_{k=1}^n (b_n + a_k) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (a_n + b_j)} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j)(b_j - b_i)$$

Soit $n \geq 2$:

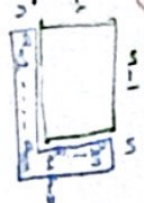
$$\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j)(b_j - b_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_j - b_i)$$

NB

$$\prod_{i=2}^{n-1} (a_i - a_n)$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_i - a_j)(b_j - b_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_j - b_i)$$

$$\prod_{i=2}^n (a_i - a_n) \times \prod_{i=2}^{n-1} (a_i - a_n)$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \alpha_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \alpha_n \Delta_n} \quad \text{CQFD}$$

$$4 \quad \text{On a } \alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_n) & R(b_n) & \dots & R(b_n) \end{vmatrix}$$

$$\text{Or } R(b_n) = \dots = R(b_{n-1}) = 0$$

$$\text{Alors } \alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \dots & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0$$

On développe suivant la dernière ligne, on a :

$$\alpha_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$$

$$5 \quad (i) \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} - \frac{1}{(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$

$$= \frac{(a_2+b_2)(a_2+b_1) - (a_2+b_1)(a_1+b_2)}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_2+b_1)(a_1+b_2)}$$