

Série Révision Déterminant

✂ Exercice 1

Soit D_n le déterminant de taille n suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

- 1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $D_{n+2} = 3D_{n+1} - 2D_n$.
- 2) En déduire la valeur de D_n pour tout $n \geq 1$.

✂ Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$\exists \alpha > 0, \forall \varepsilon \text{ tel que } 0 < |\varepsilon| < \alpha, \text{ on a : } A + \varepsilon I_n \text{ est inversible.}$$

(Ind : considérer le polynôme de degré n , $P(X) = \det(A + XI_n)$).

✂ Exercice 3 Soit A et B deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ c'est à dire il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

On pose $P = Q + iR$ avec $Q, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que $QA = BQ$ et $RA = BR$.
- 2) On considère le polynôme $H(X) = \det(Q + XR) \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que H est un polynôme non nul.

3) En déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion .

Si A et B sont deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 "Déterminant de Vandermonde".

Soit $n \geq 2$ et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n nombres complexes deux à deux distincts.

On se propose de calculer le déterminant suivant appelé déterminant de Vandermonde :

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & . & . & . & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & . & . & . & \alpha_n^2 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & . & . & . & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer $V(\alpha_1, \alpha_2)$ et $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.
2. On pose $P(X) = V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, X)$.
a) Démontrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égale à $n - 1$ et donner son coefficient dominant.
b) Déduire que $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i)$.
3. Montrer que $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.

Application 1.

On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\longmapsto P(\alpha_1), P(\alpha_2), \dots, P(\alpha_n)\end{aligned}$$

Montrer de deux manières différentes que φ est un isomorphisme.

Application 2

On admet que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors M est trigonalisable c. à d. il existe

$$P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } M = P \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{n_1} & & & & \\ 0 & \alpha_2 I_{n_2} & & & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_k I_{n_k} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont appelés les valeurs propres de M , elles sont deux à deux distincts et chaque α_i est répétée $n_i \in \mathbb{N}$ fois ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$).

1) Montrer que

$$\text{tr}(M^i) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \iff$$

$$\begin{cases} n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + \dots + n_k \alpha_k = 0 \\ n_1 \alpha_1^2 + n_2 \alpha_2^2 + \dots + n_k \alpha_k^2 = 0 \\ \dots \\ n_1 \alpha_1^k + n_2 \alpha_2^k + \dots + n_k \alpha_k^k = 0 \end{cases}$$

2) Dédurre que $\text{tr}(M^i) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

Exercice 5 "Matrice compagnon"

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_0$ un polynôme unitaire de $IK[X]$, on lui associe la matrice compagnon $C_p \in \mathcal{M}_n(IK)$ suivante :

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que C_p est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2. Montrer que $\det(XI_n - C_p) = P(X)$.

3. On considère E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $B = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

a) Ecrire la matrice de f dans la base B .

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme.

Exercice 6 "D'après MP2023".

Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$.

On note $B = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$.

1. On pose $D(P) = \det_B(P, XP, P', XP', X^2P')$

$$\text{Vérifier que } D(P) = \begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & 0 \\ b & c & 2a & b & 0 \\ a & b & 3 & 2a & b \\ 1 & a & 0 & 3 & 2a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Justifier que $D(P) = 0$ si et seulement si la famille (P, XP, P', XP', X^2P') est liée.

3. En déduire que si $D(P) = 0$, alors il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]$ non nuls tels que $\deg(U) \leq 1$, $\deg(V) \leq 2$ et $UP + VP' = 0$

4. Montrer que P admet une racine multiple.

5. Montrer que $D(P) = 4a^3c - 18abc + 4b^3 - a^2b^2 + 27c^2$.

Exercice 7 "Déterminant de Cauchy".

On considère un entier n supérieur ou égal à 2 et deux suites finies de réelles $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ telles que pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_i + b_j \neq 0$.

Le déterminant de Cauchy d'ordre m associé aux familles $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ est le nombre Δ_m égale au déterminant de la matrice

$$\left(\frac{1}{a_k + b_k} \right)_{1 \leq k \leq m}$$

1. On suppose qu'il existe $(i_1, i_2) \in \{1, \dots, n\}^2$, $i_1 \neq i_2$ tel que $a_{i_1} = a_{i_2}$. Justifier que $\Delta_n = 0$.

On suppose dans la suite que les réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts et on considère la fraction rationnelle

$$R(X) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (X - b_j)}{\prod_{j=1}^n (X + a_j)}.$$

2. Vérifier que $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X + a_k}$ et donner l'expression de α_k en fonction des réels a_k et b_k .

3. Montrer que $\alpha_n \Delta_n =$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdot & \cdot & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdot & \cdot & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ R(b_1) & \cdot & \cdot & R(b_{n-1}) & R(b_n) \end{vmatrix}$$

4. En déduire que $\alpha_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$.

5. Calculer Δ_2 puis montrer que pour tout n supérieur ou égale à 2

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Exercice 8 Justifier que le système suivant est de Cramer et donner sa solution :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$



Problème " Polynôme caractéristique ".

Partie I.

On désigne par $IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et considère $A \in M_n(IK)$.

On dit que $\lambda \in IK$ est une valeur propre de A s'il existe $X_0 \in M_{n,1}(IK) \setminus \{0\}$ vérifiant $AX_0 = \lambda X_0$.

On note $Sp_{IK}(A) = \{\lambda \in IK, \text{ tel que } \lambda \text{ est une valeur propre de } A\}$.

$Sp_{IK}(A)$ est appelé spectre de A dans IK .

On pose $P_A(X) = \det(XI_n - A)$. P_A est un polynôme unitaire de degré n .

P_A est appelé le polynôme caractéristique de A .

1. Soit $\lambda \in IK$.

a) Montrer que λ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

b) Montrer $\lambda \in Sp_{IK}(A)$ si et seulement si λ est une racine de P_A .

c) Dédire que pour toute matrice $A \in M_n(IK)$, on a $Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

d) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $Sp_{\mathbb{C}}(M)$ et $Sp_{\mathbb{R}}(M)$.

2. Montrer que A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A .

3. Montrer que si A et B sont deux matrices semblables, alors $P_A(X) = P_B(X)$ puis déduire que $Sp_{IK}(A) = Sp_{IK}(B)$.

4. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de M .

b) Dédire les valeurs propres réelles de M .

c) Dédire que M est inversible et donner la valeur de $\det(M)$.

5. Soit $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer $rg(A)$ puis déduire que 0 est une valeur propre de N .

b) Calculer $P_N(X)$.

6. On considère une matrice par blocs $A \in M_n(IK)$

$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $B \in M_k(IK)$ et $D \in M_p(IK)$, $p + k = n$.

a) Montrer que $P_B(X)$, le polynôme caractéristique de B , divise $P_A(X)$, le polynôme caractéristique de A .

b) Dédire que $Sp_{IK}(B) \subset Sp_{IK}(A)$.

Partie II.

On considère E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, B une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On définit le déterminant de u par le déterminant de sa matrice dans la base B et son polynôme caractéristique par : $P_u(X) = \det(XI_n - M(u, B))$.

1. Montrer que le déterminant de u ainsi que son polynôme caractéristique P_u ne dépendent pas de la base choisie.

2. Soit F un sous espace vectoriel de E . On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$.

Justifier que si F est stable par u , alors la restriction de u à F , notée u_F est un endomorphisme de E .

3. On suppose dans cette question que $E = F \oplus G$.

a)i) Montrer que si F est stable par u , alors il existe une base B' de E telle que la matrice de u dans B' est triangulaire par blocs

$$M(u, B') = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & H \end{pmatrix}.$$

ii) Déduire que si λ est une valeur propre de u_F , alors λ est une valeur propre de u .

4. i) Montrer que si F et G sont stables par u , alors la matrice de u dans B' est diagonale par blocs

$$M(u, B'') = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}.$$

ii) Déduire que $Sp_{IK}(u) = Sp_{IK}(u_F) \cup Sp_{IK}(u_G)$