

Exercice 4

1) Soit $x \in \ker f^k \Leftrightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0$
 $\Rightarrow x \in \ker f^{k+1}$

D'où $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow$ La suite $(\ker f^k)$ est croissante.

2) Supp $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $\ker f^p = \ker f^{p+1}$
 Montrons que $\forall k \geq p$; $\ker f^k = \ker f^p$
 Le résultat est vrai pour $k = p$ car $\ker f^p = \ker f^p$
 Soit $k > p$, supposons que $\ker f^{k-1} = \ker f^p$
 et tq $\ker f^{k-1} = \ker f^p$

On a: $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$

$\Rightarrow \ker f^p \subset \ker f^{p+1}$

Tq $\ker f^{p+1} \subset \ker f^p$

Aut $x \in \ker f^{p+1} \Leftrightarrow f^{p+1}(x) = 0$

$\Rightarrow f^p(x) \in \ker f^p = \ker f^p$ (hypothèse)

$\Rightarrow f^{p+1}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker f^p$

D'où $\ker f^{p+1} \subset \ker f^p$

Ainsi $\ker f^{p+1} = \ker f^p$

$\Rightarrow \forall k \geq p$; $\ker f^k = \ker f^p$

3) Soit $y \in \text{Im } f^{p+1} \Leftrightarrow \exists x \in V$
 $y = f^{p+1}(x) = f^p(f(x)) = f^p(x')$ avec $x' = f(x)$

$\Rightarrow y \in \text{Im } f^p$
 D'où $\text{Im } f^{p+1} \subset \text{Im } f^p$

4) Supp $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $\text{Im } f^p = \text{Im } f^{p+1}$
 Montrons que $\forall k \geq p$; $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$

Pour $k = p$ le résultat est vrai.
 Soit $k > p$, supposons que $\text{Im } f^{k-1} = \text{Im } f^p$
 et montrons que $\text{Im } f^k = \text{Im } f^p$

On a: $\text{Im } f^{k+1} \subset \text{Im } f^k$

Soit $y \in \text{Im } f^k = \text{Im } f^{k+1}$

$\Rightarrow \exists x \in V$ tq $y = f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$

$\Rightarrow f^k(x) \in \text{Im } f^p = \text{Im } f^p \Rightarrow \exists x' \in V$ tq

$f^k(x) = f^p(x')$, d'où $y = f(f^p(x'))$

$= f^{p+1}(x') \in \text{Im } f^{p+1}$

$\Rightarrow y \in \text{Im } f^{p+1} \Rightarrow \text{Im } f^k \subset \text{Im } f^{p+1}$

Ainsi $\text{Im } f^k = \text{Im } f^{p+1}$

II) 1) D'après le LR du rang

$$\dim \ker(f^p) + \dim \operatorname{Im} f^p = \dim E$$

$$\Leftrightarrow m + i_p = E; \forall p \in \mathbb{N}^*$$

2) D'après I-3 $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $\ker f^p = \ker f^{p+1}$

$$n_p = n_{p+1}$$

On pose $F = \{k \in \mathbb{N}^* \mid n_k = n_{k+1}\}$

$$F \subset \mathbb{N}^* \Rightarrow F \neq \emptyset \Rightarrow \min F \text{ existe}$$

On pose. $r = \min F \Rightarrow r \leq n$ et $n_r = n_{r+1}$

3) On a $n_r + i_r = n$

$$\Leftrightarrow \dim \ker f^r + \dim \operatorname{Im} f^r = \dim E \quad \text{d'où}$$

De plus si $y \in \ker f^r \cap \operatorname{Im} f^r$ alors

$$\left\{ \begin{array}{l} f^r(y) = 0 \\ \exists x \in E \text{ tq } y = f^r(x) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow f^{2r}(x) = 0 \Rightarrow x \in \ker f^{2r} = \ker f^r$$

$$\Rightarrow f^r(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \in \ker f^r$$

$$\Rightarrow \ker f^r \cap \operatorname{Im} f^r = \{0\} \quad (2)$$

$$\Rightarrow E = \ker f^r \oplus \operatorname{Im} f^r$$

4) On a la suite $(\operatorname{Im} f^p)$ est décroissante.

$$\Rightarrow \operatorname{Im} f^{p+1} \subset \operatorname{Im} f^p \Leftrightarrow \operatorname{Im} f^{p+1} \text{ est un s.e.v de } \operatorname{Im} f^p$$

de. $\operatorname{Im} f^p$ qui est de dimension finie.

Alors il existe D_p un s.e.v de $\operatorname{Im} f^p$.

$$\text{tq } \operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1} \oplus D_p$$

$$\Rightarrow \dim D_p = \dim \operatorname{Im} f^p - \dim \operatorname{Im} f^{p+1}$$

$$\dim D_p = i_p - i_{p+1} = \delta_p$$

$$b) \text{ On a. } \operatorname{Im} f^{p+1} = f(\operatorname{Im} f^p)$$

$$\text{Or } \operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1} \oplus D_p$$

$$\Rightarrow f(\operatorname{Im} f^p) = f(\operatorname{Im} f^{p+1} + D_p) = f(\operatorname{Im} f^{p+1}) + f(D_p)$$

$$= \operatorname{Im} f^{p+2} + f(D_p)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} f^{p+1} = \operatorname{Im} f^{p+2} + f(D_p)$$

c) D'après b)

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f^{p+1}) = \dim(\operatorname{Im} f^{p+2} + f(D_p))$$

$$\leq \dim \operatorname{Im} f^{p+2} + \dim f(D_p)$$

$$\leq \dim \operatorname{Im} f^{p+2} + \dim D_p$$

$$\Rightarrow i_{p+1} - i_{p+2} \leq \dim D_p = i_p - i_{p+1} = \delta_p$$

$$\Rightarrow i_{p+1} - i_{p+2} \leq \delta_p \text{ et } \delta_p = i_p - i_{p+1}$$

$$\Rightarrow i_{p+1} - i_{p+2} \leq i_p - i_{p+1} \Rightarrow i_{p+1} \leq i_p$$

$$\Rightarrow \dim f^p(E) \leq \dim f^{p+1}(E)$$

$$\Rightarrow \dim f^p(E) \leq \dim f^{p+1}(E)$$

$$\Rightarrow \dim f^p(E) \leq \dim f^{p+1}(E)$$

ex 1.

I) $^{1/}$ soit $A = (a_{ij})_{i,j \in n}$ et $B = (b_{ij})_{i,j \in n}$.

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk}$$

$$= \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \text{tr}(BA)$$

$$= \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \text{tr}(BA)$$

2) Si A et B sont semblables $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $B = P A P^{-1}$
 $\Rightarrow \text{tr}(B) = \text{tr}(P A P^{-1}) = \text{tr}(A P P^{-1}) = \text{tr}(A)$

3) $H = \{ A = (a_{ij}) \text{ tq } \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0 \}$
 $= \ker \ell$ avec $\ell: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$
 $A \mapsto \ell(A) = \text{tr}(A)$

ℓ est une app. linéaire de $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$
 $\Rightarrow \ell$ est une forme linéaire.
 De plus on a $\ell(I_n) \neq 0 \Rightarrow \ell$ est non nulle

Ci montre que $H = \ker \ell$ est un hypoplan. $\Rightarrow \dim H = \dim M_n(\mathbb{C}) - 1$
 $\dim H = n^2 - 1$

1. $I_n \notin H \Rightarrow M_n(\mathbb{C}) = H \oplus \text{vect}(I_n)$

II) $A R B \Leftrightarrow A$ et B sont semblables
 $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $B = P A P^{-1}$.

1) $A R A$ car $A = I_n A I_n^{-1}$. Réflexivité
 2) $A R B \Leftrightarrow B = P A P^{-1}$

$$\Leftrightarrow A = P^{-1} B P \Leftrightarrow A R B$$

3) $A R B$ et $B R D \Rightarrow D = Q B Q^{-1}$

$$\Rightarrow D = Q P A P^{-1} Q^{-1} = (Q P) A (Q P)^{-1}$$

$\Rightarrow R$ transitive
 R est une relation d'équivalence

2) $\ell(I_n) = 1 \neq 0 \Rightarrow A \in M_n(\mathbb{C})$ tq $A R I_n$
 $A R I_n \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $A = P I_n P^{-1}$
 $A = I_n$

$\Rightarrow \ell(R(I)) = \{I_n\}$
 si $A \in \ell(R(I)) \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$
 $A = P I_n P^{-1} \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(P I_n P^{-1})$
 $= \text{rg}(I_n) = 1$

$\Rightarrow \ell(R(I)) = \{I_n\}$
 si $A \in \ell(R(I)) \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$
 $A = P I_n P^{-1} \Rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(P I_n P^{-1})$
 $= \text{rg}(I_n) = 1$

$\text{rg}(A) \neq \text{rg}(B) \Rightarrow A \not R B$

exercice 3

$$A \in M_n(\mathbb{C}) \quad \text{tq} \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Montrons que A est inversible. $\Leftrightarrow$

$$\text{Mq ker } A = \{0\} \text{ sur } \mathbb{C}^n$$

$$\text{Soit } X \in M_n(\mathbb{C}) \text{ tq } AX = 0_{M_n(\mathbb{C})}$$

$$\text{Mq } X = 0$$

Supposons que $X \neq 0 \Rightarrow \exists x_i \neq 0$

$$\text{On pose } |x_k| = \max \{ |x_i| ; x_i \neq 0 \}$$

$$\text{Comme } AX = 0 \Rightarrow (AX)_k = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = 0 \Leftrightarrow a_{kk} x_k = - \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j$$

$$\Rightarrow |a_{kk} x_k| = \left| \sum_{j \neq k} a_{kj} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| |x_j|$$

$$\leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| |x_k|$$

$$\text{Or } |x_k| \neq 0 \Rightarrow |a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \quad \text{imp.} \Rightarrow X = 0$$

$$\Rightarrow |a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \quad \text{imp.} \Rightarrow X = 0$$

Exercice 9 "Ende-cyclique"

$$\forall f \in \mathcal{F}(E) \text{ tq } f^p = \text{id} \text{ et } f^{p-1} \neq \text{id}$$

$$\text{a) On a } f^{p-1} \neq \text{id} \Rightarrow \exists x_0 \neq 0 \in E \text{ tq } f^{p-1}(x_0) \neq 0 \in E$$

$$\text{b) Montrons que } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est libre.}$$

$$\text{Soit } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \in K \text{ tq.}$$

$$\text{① } \alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0 \in E$$

$$\text{Montrons que } \alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1} = 0$$

$$\text{Supposons qu'il existe } k \in \{0, \dots, p-1\} \text{ tq } \alpha_k \neq 0$$

$$\text{On pose } j = \min \{ i \in \{0, \dots, p-1\} \text{ tq } \alpha_i \neq 0 \}$$

Il existe puisque l'ensemble $\{i \in \{0, \dots, p-1\} ; \alpha_i \neq 0\}$ est non vide et c'est une partie de $\{0, \dots, p-1\}$

$$\Rightarrow \alpha_j \neq 0 ; \forall i < j, \alpha_i = 0 \text{ et } \alpha_j \neq 0$$

$$\text{② } \alpha_j f^j(x_0) + \alpha_{j+1} f^{j+1}(x_0) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x_0) = 0$$

On applique f^{p-1-j} on obtient $\alpha_{j+1} f^{p-1-j}(x_0) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1-j}(x_0) = 0$

$$\alpha_j f^{p-1}(x_0) + \alpha_{j+1} f^{p-1-j}(x_0) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1-j}(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_j f^{p-1}(x_0) = 0$$

$$\text{Or } f^{p-1}(x_0) \neq 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \text{ imp.}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i \in \{0, \dots, p-1\}$$

c) Puisque la famille B est libre, densité
 alors $\text{card } B \leq \dim E \Leftrightarrow p \leq n$.

d) Si $p = n$, alors $\text{card } B = \dim E$
 D'où B base de $E \Rightarrow f$ est cyclique.

e) Pour $p = n$

$$\text{Mat}(f, B) =$$

$$\begin{pmatrix} f(x_0) & f^2(x_0) & \dots & f^n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & f(x_0) \end{pmatrix}$$

2) Hyp: f est cyclique $\Leftrightarrow \exists x_0 \in E \setminus \{0\}$
 $\text{eq } (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.

$\text{Mq } (Id_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre.

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$ tq.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\text{Car } (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)) \text{ est libre.}$$

3) f est un p -cycle. $\Leftrightarrow$
 $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice
 et $f^p(x_0) = x_0$

a) On a $f^p(x_0) = x_0$,
 $\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, f^k(x_0) \neq x_0$

$$\Rightarrow \forall k \in \{0, \dots, p-1\}, f^p(f^k(x_0)) = f^k(x_0)$$

Car la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$
 est génératrice, alors $f^p = Id_E$.

b) $H = \{k \in \mathbb{N}; (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est libre}\}$

$$\text{On a } 0 \cdot H \subset \mathbb{N}.$$

$$\begin{cases} \cdot H \neq \emptyset \text{ car } 1 \in H. \\ \cdot \forall k \in H, k \leq n \Rightarrow H \text{ majoré par } n \end{cases}$$

$$\Rightarrow H \text{ admet un maximum.}$$

d) Soit $m = \max H \Rightarrow m \in H$.
 $\Rightarrow$ la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$
 est libre

4)

On a une suite récurrente que
 $\forall k \geq m: f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$

Pour $k = m$, on a H engendré.

$(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre et

$(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$ est liée

D'où $f^m(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$

D'où le résultat pour $k = m$

Soit $k > m$, supposons

$f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$

et montrons que $f^{k+1}(x_0) \in \text{vect}(x_0, \dots, f^{m+1}(x_0))$

Puisque $f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$

Alors $f^{k+1}(x_0) \in \text{vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0))$

Comme $f^m(x_0) \in \text{vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$

Alors $f^{k+1}(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$

d) On a $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est
 générique, alors $p \geq n = \dim(E)$
 $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre.

$\Rightarrow m \leq n$

$\Rightarrow m \leq n \leq p$

De plus $E = \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$

Or $\forall k \geq m: f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$

$\Rightarrow E = \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$

$\Rightarrow (x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre.

et générique. $\Rightarrow$ base de E

$\Leftrightarrow$ est cyclique. et $m = n$

e) $\text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{m-1} \\ f(x_0) & \dots & f(x_{m-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{m-1}(x_0) & \dots & f^{m-1}(x_{m-1}) \end{pmatrix}$ base de E

$\Rightarrow \text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} x_0 & \dots & x_{m-1} \\ f(x_0) & \dots & f(x_{m-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{m-1}(x_0) & \dots & f^{m-1}(x_{m-1}) \end{pmatrix}$

$f^m(x_0) \in E$

$\Rightarrow \exists a_0, \dots, a_{m-1}: f^m(x_0) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i f^i(x_0)$

Exercice 6

a) $A \in M_n(K)$.

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ | & | & & | \\ | & | & & | \\ | & | & & | \end{pmatrix} \text{ les } c_j \text{ sont}$$

les vecteurs colonnes de A .

Puisque $\text{rg}(A) = 1$, alors il existe $C_{j_0} \neq 0_{n,1}$

et $\forall j \neq j_0: C_j = \alpha_j C_{j_0}, \alpha_j \in K$

$$A_{\text{pos}} A = C_{j_0} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

on pose $X = C_{j_0} \neq 0$

$$\text{et } Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \neq 0$$

$$A_{\text{pos}} A = X \cdot {}^t Y$$

$$\Leftrightarrow \text{hyp } A = X \cdot {}^t Y \Rightarrow A = X (y_1 - y_n)$$

avec $X \neq 0 \Rightarrow C_j = y_j \cdot X, \forall 1 \leq j \leq n$

Puisque $\forall j \neq 0 \Rightarrow \exists j_0$ tq $y_{j_0} \neq 0 \Rightarrow C_{j_0} \neq 0$

$$\Rightarrow \text{rg}(A) = 1.$$

b) Soit $A \in M_n(K)$ tq $\text{rg}(A) = 1 \Rightarrow \exists X \neq 0$ et

$$\exists Y \neq 0 \text{ tq } A = X \cdot {}^t Y.$$

$$\text{Im } A = \text{vect}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \text{vect}(X)$$

$$\cdot \text{ker } A = \{ Z \in M_n(K); AZ = 0 \}$$

$$AZ = 0 \Leftrightarrow X \cdot Y \cdot Z = 0$$

$$\text{Or } X \neq 0_{n,1} \Rightarrow {}^t Y \cdot Z = 0$$

D'une ker $A = \{ Z \in M_n(K) \text{ tq } {}^t Y \cdot Z = 0 \}$

c) Les vecteurs X et Y de la question 1 ne sont pas linéaires.

$$\text{Exp } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg } A = 1$$

$$A = X \cdot {}^t Y$$

$$A = X \cdot {}^t Y \text{ avec } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = X \cdot {}^t Y \text{ avec } X' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \text{rg}(A) = 1 \text{ tq } A = X \cdot {}^t Y = X' \cdot {}^t Y'$$

$$\text{On a } \text{Im } A = \text{vect}(X) = \text{vect}(X') \Rightarrow \exists \alpha \neq 0$$

$$\text{tq } X' = \alpha X.$$

$$\text{D'où } X \cdot {}^t Y = \alpha X \cdot {}^t Y'$$

$$\Rightarrow {}^t X X \cdot {}^t Y = \alpha {}^t X X \cdot {}^t Y'$$

$$\text{Or } X \neq 0 \Rightarrow {}^t X X \neq 0 \Rightarrow {}^t Y = \alpha {}^t Y'$$

$$Y = \alpha Y'$$

$$\text{e) } \Rightarrow \text{rg } A = 2 \Rightarrow \exists C_{j_1} \neq 0 \text{ et } \exists C_{j_2} \neq 0$$

$$\text{tq } \forall k \leq n;$$

$$C_j = \alpha_j C_{j_1} + \beta_j C_{j_2}, \alpha_j, \beta_j \in K$$

On page.

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

et $W =$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$X = C_{\delta_i} \text{ et } Z = C_{\delta_j}$$

$$A \text{ pour } A = X^t Y + Z^t W$$

$$\text{Notons que } \delta_{\delta_i} = 1 \text{ et } \beta_{\delta_i} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\delta_i} = 0 \text{ et } \beta_{\delta_i} = 1 \end{array} \right.$$

A pour (Y, W) libre.

" $\Leftarrow$ " évident.

2100M2021a