

Série : Révision espace vectoriel et application linéaire

Exercice 1 I) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$, A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que

a) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.

b) $\text{tr}({}^t A) = \text{tr}(A)$.

c) $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

d) Si A et B sont semblables, alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

2) Soit $H = \{A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0\}$.

a) Montrer que H est un hyperplan de $M_n(\mathbb{C})$ et donner sa dimension.

b) Donner un supplémentaire de H dans $M_n(\mathbb{C})$.

II) On définit sur $M_n(\mathbb{C})$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \quad A \mathcal{R} B \iff A \text{ et } B \text{ sont semblables.}$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{C})$.

2) Donner la classe d'équivalence de la matrice I_n .

3) a) Vérifier que si $A \in CL_{\mathcal{R}}(B)$, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

b) Les deux matrices suivantes sont-elles en relation ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 .

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 3 .

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E .

I)

1. Vérifier que la suite des $\ker$ est une suite croissante pour l'inclusion c. à. d.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1}).$$

2. Montrer s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$, alors // $\forall k \geq p, \quad \ker(f^k) = \ker(f^p)$.

3. Montrer que si E est de dimension finie, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$.

4. Montrer que la suite des images est une suite décroissante pour l'inclusion c. à. d.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{Im}(f^k) \supset \text{Im}(f^{k+1}).$$

5. Montrer s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1})$, alors // $\forall k \geq p, \quad \text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^p)$.

II) On suppose dans cette partie que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $n_p = \dim(\ker(f^p))$ et $i_p = \dim(\text{Im}(f^p))$

1. Calculer $n_p + i_p$.

2. Etablir l'existence d'un plus petit entier naturel $r \leq n$ tel que $n_r = n_{r+1}$.

3. Montrer que $E = \ker(f^r) \oplus \text{Im}(f^r)$.

4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_p = i_p - i_{p+1}$.
- Justifier l'existence d'un sous espace vectoriel D_p tel que $\text{Im}(f^p) = \text{Im}(f^{p+1}) \oplus D_p$ et donner $\dim D_p$.
 - Montrer que $\text{Im}(f^{p+1}) = \text{Im}(f^{p+2}) + u(D_p)$.
 - Déduire que la suite (δ_p) est décroissante.

Exercice 4 "Polynôme de Lagrange "

On considère $a_1, \dots, a_n$ n réels deux à deux distincts.

On pose $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

Les polynômes $L_1, \dots, L_n$ sont appelés les polynômes de Lagrange en $a_1, \dots, a_n$.

- Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Donner le degré de L_i et son coefficient dominant.
 - Calculer $L_i(a_j)$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$.
 - Prouver que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 - Montrer que, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a : $P(X) = \sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(X)$.
- Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $Q(a_i) = e^{a_i}$.
- Montrer que $\forall A \in \mathbb{R}[X]$, $\exists B \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_i) B(X) + \sum_{i=1}^n A(a_i) L_i(X).$$

- Montrer que $X^n = \prod_{i=1}^n (X - a_i) + \sum_{i=1}^n a_i^n L_i(X)$.
 - Donner la valeur de $\sum_{i=1}^n a_i^n L_i(0)$.
 - Déduire que

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i i^n C_n^i = (-1)^n n!.$$

Exercice 5 Soit $A \in M_p(IK)$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

Pour $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in IK[X]$, on pose

$$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k = a_0 I_p + a_1 A + \dots + a_n A^n \in M_p(IK)$$

Pour $P, Q \in IK[X]$, on définit :

$$(P + Q)(A) = P(A) + Q(A) \quad \text{et} \quad (P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A).$$

Partie I.

- Soit $A \in M_p(IK)$, on suppose dans cette question qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_p(IK)$ tel que $A = Q D Q^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ une matrice diagonale.
 - Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = Q D^k Q^{-1}$.
 - Déduire que $\forall P \in IK[X]$, $P(A) = Q P(D) Q^{-1}$.
 - Déduire que si $P \in IK[X]$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont ses racines, alors $P(A) = 0_n$.
- Soit $\lambda \in IK$. On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur $X \in M_{p,1}(IK) \setminus \{0_{p,1}\}$ tel que $AX = \lambda X$.
Soit λ une valeur propre de A , on définit le sous espace propre de A associée à λ par :
 $E_\lambda = \{X \in M_{p,1}(IK); AX = \lambda X\}$
 - Justifier que E_λ est un sous espace vectoriel de $M_{p,1}(IK)$.
 - Soit λ est une valeur propre de A et $X \in M_{p,1}(IK) \setminus \{0_{p,1}\}$ tel que $AX = \lambda X$.
 - Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$.
 - Déduire que $\forall P \in IK[X]$ $P(A)X = P(\lambda)X$.
 - On dit qu'un polynôme P est un polynôme annulateur de A s'il vérifie $P(A) = 0_n$.
Montrer que si λ une valeur propre de A , alors λ est une racine de tout polynôme annulateur P .

Partie II On considère dans cette partie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X) = X^2(X - 3)$ est un polyôme annulateur de A .
2. Montrer que si λ est une valeur propre de A , alors $\lambda = 0$ ou $\lambda = 3$.
3. a) Déterminer les sous espaces vectoriels E_0 et E_3 .
b) Dédire que 0 et 3 sont des valeurs propres de A .

Exercice 6 Soit $A \in M_n(IK)$.

1. a) Montrer que A est une matrice de rang 1 si et seulement si il existe X et Y deux vecteurs non nuls de $M_{n,1}(IK)$ tels que $A = X^t Y$.
b) Soit A est une matrice de rang 1. Déterminer $\text{Im}(A)$ et $\ker(A)$.
c) Les vecteurs X et Y de la question 1 sont ils uniques ?
d) Soit A une matrice de rang 1 telle que $A = X^t Y = X'^t Y'$. Trouver une relation entre X et X' , Y et Y' .
2. Montrer que A est une matrice de rang 2 si et seulement si il existe X, Y, Z, W quatre vecteurs de $M_{n,1}(IK)$ tels que (X, Z) est libre, (Y, W) est libre et $A = X^t Y + Z^t W$.

Exercice 7 "Endomorphisme Cyclique et p -cycle "

Soient E un IK ($IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)-espace vectoriel de dimension n avec $n \geq 2$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $f^0 = \text{id}_E$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$ p -fois.

On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique s'il existe un élément $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel la famille $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ Soit une base de E .

On dit qu'un endomorphisme f de E est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ si $f^p = \tilde{0}$ et $f^{p-1} \neq \tilde{0}$.

1. On considère f un endomorphisme nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
b) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
c) Comparer p et n .
d) Montrer que si $p = n$, alors f est cyclique et déterminer la matrice de f dans la base B .
2. Montrer que si f est cyclique, alors la famille $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{p-1})$ est libre.
3. Soit f un endomorphisme de E et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est un p -cycle, s'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que

$$\begin{cases} (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ soit génératrice de } E \\ f^p(x_0) = x_0 \end{cases}.$$

On suppose dans cette question que f est un p -cycle.

- a) Montrer que $f^p = \text{id}_E$ et déduire que f est bijective.
- b) Soit $H = \{k \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ soit libre}\}$. Justifier que H admet un maximum noté m .
- c) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à m , $f^k(x_0) \in \text{vect}\{x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\}$.
- d) En déduire que f est cyclique.
- e) Déterminer la matrice de f relativement à la base B .