

Problème :

Partie II

$$I_U = \{ P \in K[X] \mid P(U) = 0 \}$$

Rq $\exists !$ Poly. unitaire φ .

$$I_U = \pi_U \cdot (K[X]).$$

Soit $J = \{ \deg P \mid P \in I_U \}$.

$$\begin{cases} J \subset \mathbb{N} \\ \text{si } x_U \in I_U \Rightarrow \deg x_U \in J \Rightarrow J \neq \emptyset \\ x_U \neq 0 \end{cases}$$

Soit J admet un min.
 $k = \min J$.

et $H \in I_U$ tel $\deg H = k$.

empire. $\pi_U = \frac{H}{\text{cofacteur } H} = \text{unitaire}$

$$\Rightarrow \deg \pi_U = k \text{ et } \pi_U(U) = 0$$

Rq $I_U = \pi_U \cdot (K[X])$.

" $\supset$ " Soit $P \in K[X]$.

$$(\pi_U \cdot P)(U) = \pi_U(U) \varphi(U) = 0.$$

$$\Rightarrow \pi_U \cdot P \in I_U \Rightarrow \pi_U \cdot (K[X]) \subset I_U.$$

" $\subset$ " Soit $P \in I_U$, on effectue la division euclidienne de P par π_U .

$$\Rightarrow \exists Q \text{ et } R \in K[X] \text{ tel } P = Q \pi_U + R.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(U) &= Q(U) \pi_U(U) + R(U) \\ &= 0 + R(U) \\ \Rightarrow P(U) &= 0. \end{aligned}$$

Soit $P \in I_U$
par π_U
"0".

Supposons $R \neq 0$
 et on a $R(U) = 0 \Rightarrow \deg R \geq \deg \pi_U = k$
 d'après

$$\Rightarrow R = 0$$

$$\Rightarrow P = \varphi \cdot \pi_U \Rightarrow P \in \pi_U \cdot K[x]$$

Ainsi $I_U = \pi_U \cdot K[x]$

unicité

Supp $\exists A \in K[x]$ tel $I_U = A \cdot K[x]$
 et $\deg A = k$
 A unitaire

$$\Rightarrow A \cdot K[x] = \pi_U \cdot K[x]$$

$$\Rightarrow \pi_U / A \text{ et } A / \pi_U$$

$$\text{or } \deg \pi_U = \deg A = k$$

et π_U et A sont unitaires

$$\Rightarrow A = \pi_U$$

cl

π_U : polynôme minimal.

= l'unique poly unitaire
 annulateur de degré minimal
 de U .

$\rightarrow$ Si P est un poly annulateur de U
 $\Rightarrow \pi_U / P$

$\rightarrow \pi_U / X_U$ (car $X_U(U) = 0$)

$\rightarrow$ racines de $\pi_U = Sp(U)$

$$\rightarrow \text{si } X_U(x) = \prod_{i=1}^{p-1} (x - d_i)^{q_i}$$

$$\Rightarrow \pi_U(x) = \prod_{i=1}^{p-1} (x - d_i)^{q_i}$$

$\rightarrow \pi_U$ divise π_U avec $q_i \geq 1$

3) on a. $Sp(U) \subset \{ \text{racine de } \pi_U \}$
 car π_U est un. polynôme annulateur de U .

$\pi_U(X) \Rightarrow \{ \text{racine de } \pi_U \} \subset \{ \text{racine de } X \}$
 "d'après"
 $\Rightarrow Sp(U) = \{ \text{racine de } \pi_U \}$

4) Si F stable par U
 $U_F: F \rightarrow F$ l'endomorphisme

on a. $\pi_U(U) = 0 \Leftrightarrow \pi_U(U)(x) = 0, \forall x \in F$
 $\Rightarrow \pi_U(U_F) = 0$
 Donc π_{U_F} divise π_U

Partie III

1) $\text{pgcd}(P, Q) = D$

on a $\ker P(U) \cap \ker Q(U) = \ker D(U)$

"soit $x \in \ker P(U) \cap \ker Q(U)$
 $\Downarrow$

$$P(U)(x) = 0 \text{ et } Q(U)(x) = 0$$

$\text{pgcd}(P, Q) = D$

$\Rightarrow \exists A, B \in K[X]$ tel

$$D = A \cdot P + B \cdot Q$$

$\Rightarrow D(U) = A(U)P(U) + B(U)Q(U)$

$$\Rightarrow D(U)(x) = A(U)P(U)(x) + B(U)Q(U)(x)$$

$$= A(U) \underset{0}{P(U)(x)} + B(U) \underset{0}{Q(U)(x)}$$

$$= A(U) \underset{0}{0} + B(U) \underset{0}{0}$$

$\Rightarrow x \in \ker D(U) = 0_F$

$$\Rightarrow \ker P(U) \cap \ker Q(U) \subset \ker D(U)$$

$$\text{"si" soit } x \in \ker D(U) \Rightarrow D(U)(x) = 0$$

$$\text{or } D/P \Rightarrow P = H \cdot D \Rightarrow P(U)(x) = H(U)(D(U)(x)) = 0$$

$$D/Q \Rightarrow Q = C \cdot D \Rightarrow Q(U)(x) = 0$$

$$\rightarrow x \in \ker P(U) \cap \ker Q(U)$$

$$\text{Ainsi } \ker P(U) \cap \ker Q(U) = \ker D(U)$$

$$\text{e) } \text{Par } \ker P(U) + \ker Q(U) \subset \ker(P \cdot Q)(U)$$

$$\ker f \subset \ker g \circ f$$

$$\ker P(U) \subset \ker Q(U) \circ P(U) = \ker(P \cdot Q)(U)$$

$$\ker Q(U) \subset \ker(P(U) \circ Q(U)) = \ker(P \cdot Q)(U)$$

$$\text{et donc } \ker(P \cdot Q)(U) \subset \ker P(U) \cup \ker Q(U)$$

$$\Rightarrow \ker P(U) + \ker Q(U) \subset \ker(P \cdot Q)(U)$$

$$\text{b) soit } P, Q \in (K[X])^n$$

$$P \wedge Q = I$$

$$\text{Par } \ker(P \cdot Q)(U) =$$

$$\ker P(U) \oplus \ker Q(U)$$

$$\text{or } P \wedge Q = I$$

$$\Rightarrow \ker P(U) \cap \ker Q(U) = \ker(\text{id}_E) = \{0\}$$

$$\text{d'après a) } \ker(P(U) + Q(U)) \subset \ker(P \cdot Q)(U)$$

$$\text{"si" soit } P \wedge Q = I$$

$$\text{Bejoint } \exists A, B \in (K[X])^n$$

$$AP + BQ = I$$

$$\Rightarrow (AP)(U) + (BQ)(U) = \text{id}_E$$

soit $x \in \ker(P \cdot Q)(U) \in (P \cdot Q)(U)(x) = 0_E$

$$x = \underbrace{(A \cdot P)(U)(x)}_{x_1} + \underbrace{(B \cdot Q)(U)(x)}_{x_2}$$

$$\begin{aligned} Q(U)(x_1) &= (Q \cdot A \cdot P)(U)(x_1) \\ &= A(U) \underbrace{(P \cdot Q)(U)(x)}_{0_E} = 0_E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 \in \ker Q(U)$$

$$\text{donc } x_2 \in \ker P(U)$$

$$\Rightarrow \ker(P \cdot Q)(U) \subset \ker P(U) + \ker Q(U)$$

$$\Rightarrow \ker(P \cdot Q)(U) = \ker P(U) + \ker Q(U)$$

$$\text{d'où: } \ker(P \cdot Q)(U) = \ker P(U) \oplus \ker Q(U)$$

Lemme de décomposition des noyaux

Si $P_1, \dots, P_n$ sont des poly $n \geq 2$
et 2 premiers entre eux.

$$\text{Alors } \ker \prod_{i=1}^n P_i(U) = \bigoplus_{i=1}^n \ker P_i(U)$$

on démontre

$$\text{Soit } Q = \prod_{i=1}^n P_i$$

Si Q est un poly annulateur de U

$$\begin{aligned} \text{Alors } \bigoplus_{i=1}^n \ker P_i(U) &= \ker Q(U) = \{0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

- 6) Tq
- a) U est diagonalisable $\Leftrightarrow \Delta U$
 - b) $\exists$ p polynôme annulateur $\Leftrightarrow$ a racines simples
 - c) π_U est Kinde et a racines simples

a) $\Rightarrow$ b) U est diagonalisable

$$\Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i} \quad d_i = id_p \text{ ou } 2 \times$$

$$= \bigoplus_{i=1}^p \ker(U - d_i \text{Id})$$

$$= \bigoplus_{i=1}^p \ker((X - d_i) \mid U)$$

II. ΔU est comp

$$\ker \left(\prod_{i=1}^p (X - d_i) \mid U \right) = \bigcap_{i=1}^p \ker (X - d_i \mid U)$$

$$\Rightarrow \exists \varphi = \prod_{i=1}^p (X - d_i) \mid U = 0$$

a racines simples

$$L \Rightarrow C!$$

$$\text{ona. } P(U) = 0$$

$$\Rightarrow \pi_U \mid P$$

π_U est Kinde et a racines simples

$$\Rightarrow \pi_U, \dots, \dots$$

$$c) \Rightarrow a)$$

ona $Sp(U) = \{ \text{racines de } \pi_U \}$

$$\Rightarrow \pi_U(X) = \prod_{i=1}^p (X - d_i) \text{ avec } d_i \neq d_j$$

$$\Rightarrow \ker \pi_U(U) = \ker \left(\prod_{i=1}^p (X - d_i) \mid U \right)$$

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U)$$

$$\Rightarrow U \text{ est diagonalisable}$$

Ex 3 "(Série 1)"

• Φ n'est pas diagonalisable. ($\text{Sp}(\Phi) = \{-1\}$)

• $P(X) = X^2 + 2X + 1$ poly annulateur de Φ
 $= (X+1)^2$

$$(\pi_\Phi / P)$$

$$\pi_\Phi(X) = X+1$$

ou

$$\pi_\Phi(X) = (X+1)^2$$

"poly minimal"

$\Downarrow$
 Φ diag $\uparrow$ ip

5.) soit $d \in V$ et $\dim \ker(d) = m$

on $\exists G$ sous espace stable par U

$$E = \ker(U - d \text{ id}_E)^m \oplus G$$

soit $d \in V$ et $\dim \ker(d) = m$.

$$\Rightarrow \chi_U(X) = (X-d)^m \cdot \Phi(X) \text{ avec } \Phi(d) \neq 0$$

$$\Phi(d) \neq 0 \Rightarrow (X-d)^m \wedge \Phi = 1$$

$$\xrightarrow{\text{Cayley}} \ker \chi_U(U) = \ker(U - d \text{ id}_E)^m \oplus \ker \Phi(U)$$

$$\xrightarrow{\text{Hamilton}} \ker \chi_U = E = \ker(U - d \text{ id}_E)^m \oplus G$$

$$\text{avec } G = \ker \Phi(U).$$

Donc par on a. $\Phi(U) \cap U = U \cap \Phi(U)$
 $\Rightarrow \ker \Phi(U)$ est stable par U .

7) $X_U(X) = \prod_{i=1}^r (X - d_i)^{m_i}$; $d_i - d_j \neq 0$

a) $\forall i \neq j; d_i \neq d_j \Rightarrow (X - d_i)^{m_i} \wedge (X - d_j)^{m_j} = 1$

Diagonalisable. la décomposition des noyaux

$\ker X_U(U) = \bigoplus_{i=1}^r \ker (X - d_i)^{m_i}(U)$

$\parallel$

$E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ avec $F_i = \ker (U - d_i \text{Id}_E)^{m_i}$

b) on a. $(U - d_i \text{Id}_E) \circ U = U(U - d_i \text{Id}_E)$

$\Rightarrow (U - d_i \text{Id}_E)^{m_i} \circ U = U \circ (U - d_i \text{Id}_E)^{m_i}$

$\Rightarrow \ker (U - d_i \text{Id}_E)^{m_i}$ est stable par U .

F_i stable par U

on pose $U_i: F_i \rightarrow F_i$ l'endomorphisme induit

$$\forall x \in F_i; (U - d_i \text{Id}_E)^{m_i}(x) = 0$$

$$(U_i - d_i \text{Id}_{F_i})^{m_i}(x) = 0$$

Soit $n_i = U_i - d_i \text{Id}_{F_i}$

$\Rightarrow n_i^{m_i} = 0 \Rightarrow n_i$ est nilpotent

et $U_i = n_i + d_i \text{Id}_{F_i}$

Rq : $\dim E = n$.

soit $U \in \mathcal{L}(E)$ un endo nilp.
d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\pi_U(x) = x^p$.

$\chi_U(x) = x^n$.

Exercice
 $U \in \mathcal{L}(E)$ k. $\pi_U(x) = \prod_{i=1}^r (x - d_i)^{\alpha_i}$
 $d_i \neq d_j \text{ si } i \neq j$

$E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ avec $F_i = \ker(U - d_i)^{\alpha_i}$

Soit $n_i = \dim F_i$

$\Rightarrow n_i^{\alpha_i} = 0$.

Ilq. n_i est nilp. d'indice α_i .

Supposons n_i est nilp d'indice $\beta_i < \alpha_i$.

$\Rightarrow n_i^{\beta_i} = 0 \Leftrightarrow (U - d_i)^{\beta_i} F_i = 0$

$\Leftrightarrow \ker(U - d_i)^{\beta_i} = F_i$

Or

$E = \bigoplus_{k=1}^r F_k \oplus F_i$

$E = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \ker(U - d_k)^{\alpha_k} \oplus \ker(U - d_i)^{\beta_i}$

$$\Rightarrow E = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \ker \left(\prod_{k=1}^r (x-d_k)^{\alpha_k} (x-d_i)^{\beta_i} \right) (U)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r (x-d_k)^{\alpha_k} (x-d_i)^{\beta_i}} (U) = \tilde{0}$$

$$\Phi(X)(U) = \tilde{0}$$

$\Rightarrow \Phi(X)$ annulateur de U .

$\Rightarrow \deg \Phi \geq \deg \pi_U$ absurde

$$\text{car } \deg \Phi = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \alpha_k + \beta_i \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k = \deg \pi_U$$

$\Rightarrow n_i \leq \deg \beta_i$

F_i stable par U

on pose $U_i: F_i \rightarrow F_i$ l'endomorphisme

$$\forall x \in F_i: (U - d_i U_i)^{m_i}(x) = 0$$

$$(U_i - d_i \text{id}_{F_i})^{m_i}(x) = 0$$

$$\text{soit } n_i = U_i - d_i \text{id}_{F_i}$$

$$\Rightarrow n_i^{m_i} = 0 \Rightarrow n_i \text{ est nilpotent}$$

$$\text{et } U_i = n_i + d_i \text{id}_{F_i}$$

$$\Rightarrow E = \bigoplus_{L \in \mathcal{L}} \ker \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r (x - d_k)^{\alpha_k} (x - d_i)^{\beta_i} \right) (U)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r (x - d_k)^{\alpha_k} (x - d_i)^{\beta_i}} (U) = \tilde{0}$$

$$\Phi(x)(U) = \tilde{0}$$

$\Rightarrow \Phi(x)$ annulateur de U .

$\Rightarrow \deg \Phi \geq \deg \pi_U$ absurde.

car $\deg \Phi = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \alpha_k + \beta_i \leq \sum_{k=1}^r \alpha_k = \deg \pi_U$

$\Rightarrow n_i \leq \deg \beta_i$

F_i stable par U

on pose $U_i: F_i \rightarrow F_i$ l'endomorphisme induit

$$\forall x \in F_i: (U - d_i \text{id}_E)^{m_i}(x) = 0$$

$$(U_i - d_i \text{id}_{F_i})^{m_i}(x) = 0$$

soit $n_i = U_i - d_i \text{id}_{F_i}$

$$\Rightarrow n_i^{m_i} = 0 \Rightarrow n_i \text{ est nilpotent}$$

et $U_i = n_i + d_i \text{id}_{F_i}$

Exercice 6

$f \in \mathcal{L}(E)$ et $\operatorname{rg}(f) = 1$.

donc $\operatorname{Im} f = L$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(v_1)$.

e) $\operatorname{Ker} Sp(f) = \{0, \lambda(f)\}$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(v_1) \Rightarrow \exists B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$
base de E

$$\operatorname{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{matrix}$$

$$\Rightarrow Sp(f) = \{\alpha_1, 0\}$$

$$\text{or } \alpha_1 = \lambda(f) \Rightarrow Sp(f) = \{0, \lambda(f)\}$$

$$\text{si } \lambda(f) \neq 0 \Rightarrow \chi_f(x) = \underset{= \text{norme}}{(x - \lambda(f))} \cdot x^{n-1}$$

$$\text{avec } \operatorname{mult}(0) = n-1$$

$$\dim E_0 = \dim \operatorname{Ker} f = n-1 = \operatorname{mult}(0)$$

et on a. $\lambda(f) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\lambda(f) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\lambda(f) \neq 0$

$\Rightarrow$ f est diagonalisable.

$$\text{3) a) si } \lambda(f) = 0$$

$$(\operatorname{Mat}(f, B))^2 = 0_n \Rightarrow f^2 = 0$$

et $f \neq 0$ (car $\operatorname{rg}(f) = 1$) $\Rightarrow f$ est nilpotent d'indice 2.

$$\text{4) on a } (\operatorname{Mat}(f, B))^2 = \lambda(f) \cdot \operatorname{Mat}(f, B) = 0_n$$

$$\Rightarrow f^2 - \lambda(f) \cdot f = 0$$

ona. $p(x) = x^2 - \text{tr}(f)x$ est un polynôme de F stable par U
 $= x(x - \text{tr}(f))$

Si $\text{tr}(f) \neq 0 \Rightarrow$ p est scindé et à racines simples
 $\Rightarrow$ p est diagonalisable

* Si $\text{tr}(f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f^2 = 0 \\ \text{et on a } f \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ nilpotente d'ordre } 2 \\ \Rightarrow f \text{ n'est pas diagonalisable} \end{cases}$

ou bien

ona. $\pi_f / x^2 \Rightarrow \pi_f(x) = x$ ou $\pi_f(x) = x^2$

$$\pi_f(f) = 0$$

$$f^2 = 0$$

Si $\pi_f(x) = x^2$
 $\Rightarrow$ f n'est pas diagonalisable
 $\Rightarrow$ f a des racines simples

on pose $U_i: F_i \rightarrow F_i$ l'endo induit

$$\forall x \in F_i: (U_i - d_i \text{id}_{F_i})^{m_i}(x) = 0$$

$$(U_i - d_i \text{id}_{F_i})^{m_i}(x) = 0$$

$$\text{Soit } n_i = U_i - d_i \text{id}_{F_i}$$

$$\Rightarrow n_i^{m_i} = 0 \Rightarrow n_i \text{ est nilpotent}$$

$$\text{et } U_i = n_i + d_i \text{id}_{F_i}$$

Exercice 8 "Serie"

1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a ${}^t A \cdot A \in S_n^+(\mathbb{R})$

$$\cdot {}^t A \cdot A \in S_n(\mathbb{R})$$

• Soit $X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} {}^t X \cdot {}^t A \cdot A X &= {}^t (AX) \cdot AX = \|AX\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq 0 \text{ avec } Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\cdot \|X\|_2^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = {}^t X \cdot X$$

$$\cdot \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t X \cdot Y$$

$$\Rightarrow {}^t A A \in S_n^+(\mathbb{R})$$

2) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\cdot {}^t A \cdot A \in S_n(\mathbb{R})$$

• $\forall X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

$${}^t X {}^t A \cdot A X = \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq 0$$

$$\text{Supposons } {}^t X {}^t A \cdot A X = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, y_i^2 = 0 \Rightarrow y_i = 0$$

$$\Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X = 0_{n \times 1} \text{ car } A \text{ inversible}$$

$$\Rightarrow {}^t X \cdot {}^t A \cdot A X > 0$$

$$\Rightarrow {}^t A \cdot A \in S_n^+(\mathbb{R})$$

e) soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ tq. ${}^tX \cdot SX = 0, \forall X \in \mathbb{R}^n$

soit $d \in Sp(S) \Rightarrow \exists X_0 \neq 0$ tq. $SX_0 = dX_0$

$$\Rightarrow {}^tX_0 \cdot S \cdot X_0 = d \underbrace{{}^tX_0 X_0}_{\neq 0} \Rightarrow d = 0 \Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}(S) = \{0\}$$

et on a S diagonalisable
 $\Rightarrow S = 0_n$.

Autrement

$$S = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$${}^t e_i \cdot S e_j = s_{ij}$$

Soit $X, Y \in \mathbb{R}^n$

$${}^t(X+Y) \cdot S(X+Y) = 0$$

$$\Rightarrow {}^tX \cdot SX + {}^tX \cdot SY + {}^tY \cdot SX + {}^tY \cdot SY = 0$$

$$\Rightarrow {}^tX \cdot SY = 0 \quad \text{et} \quad {}^tY \cdot SX = 0$$

$$\text{Pour } X = e_i \text{ et } Y = e_j \Rightarrow s_{ij} = 0, \forall i, j$$

$$S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow S_P(S) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow \text{"soit } d \in S_P(S) \Rightarrow \exists X_0 \neq 0$$

$$\text{t.q. } SX_0 = dX_0 \Rightarrow \underbrace{X_0^T SX_0}_{\geq 0} = d \underbrace{X_0^T X_0}_{\geq 0}$$

$$\Rightarrow d \geq 0$$

$$\Leftarrow \text{hyp } S_P(S) \subset \mathbb{R}_+$$

$$\text{ona. } S = {}^t P \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \cdot P$$

$$\text{soit } X \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} {}^t X \cdot S X &= {}^t X^T P \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \cdot P X \\ &= {}^t (P X) \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \cdot P X \end{aligned}$$

$$\Rightarrow {}^t X \cdot S X = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \geq 0$$

$$P X = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

4.) D'après 3/

$$b) \Rightarrow c). \text{ hyp } S_P(S) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{ona. } S = {}^t P \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \cdot P$$

$$= {}^t P \cdot \underbrace{\text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})}_{\Gamma} \cdot \underbrace{\text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})}_P \cdot P$$

$$\Rightarrow S = {}^t \Gamma \cdot \Gamma$$

$$\text{avec } \Gamma = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}) \cdot P$$

$$\Rightarrow \text{Positive definite}$$

$$S = {}^t P \sqrt{D} \cdot \sqrt{D} \cdot P$$

$$= A e$$

$$\text{avec } A = {}^t P \sqrt{D} \cdot P \quad (\sqrt{D} = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}))$$

$$c \Rightarrow d/$$

$$S = t n \cdot n \quad \text{avec } n \in \text{Gln}(\mathbb{R})$$

$$\text{d'après 1/b} \quad S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow S$ est positive et universelle

$$d/ \Rightarrow b/$$

$\exists B' \text{ base de } E$
 $\text{Mat}(U, B') = T = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$\text{Mat}(U, B)$ est trigonalisable
 $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$
 $\text{Mat}(U, B) = P T P^{-1}$

si U est diagonalisable
 Alors U est trigonalisable

$U \in \mathcal{A}(E)$
 U est trigonalisable

si U est trigonalisable
 et F stable par U
 Alors U_F est trigonalisable
 Con X_U / X_U

si U est nilp
 $\Rightarrow \text{Sp}(U) = \{0\}$ et $X_U(x) = x^n$

si U nilp d'indice $n = \dim E$
 $\Rightarrow \exists B = (a, U(a), \dots, U^{n-1}(a))$ base de E

$\Rightarrow \text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

si $\text{Sp}(U) = \{0\}$
 et U trigonalisable
 $\Rightarrow U$ nilpotent
 Con $X_U(x) = x^n$

- $|U(e_i)| = d_i e_i$
 $\Rightarrow e_i$ v.p. de U
- $\text{Sp}(U) = \{d_1, \dots, d_n\}$

X_U est scinde dans $(K[X])$

$$h(U) = \prod_{i=1}^n d_i = \prod_{i=1}^p m_i \cdot d_i \quad (m_i = \text{mult}(d_i))$$

$$\det U = \prod_{i=1}^p d_i^{m_i}$$

$$\chi_U(x) = \prod_{i=1}^p (x - d_i)^{m_i}$$

$$\Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^p F_i \text{ avec } F_i = \ker(U - d_i \text{Id})^{m_i}$$

• F_i stable par U .

on pose $\psi_i: F_i \rightarrow F_i$ l'endomorphisme.

$$\psi_i = d_i \text{Id}_{F_i} + N_i$$

avec $N_i = n_i e_p$.

Exercice 3 "Série 3"

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1) $\chi_A(X) = (X-2)^3$

χ_A est scindé: donc $\mathbb{R}[X]$
 $\Rightarrow A$ est trigonalisable.

2) soit $B = A - 2I_3$.
 $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ $\hookrightarrow \text{Mat}(f, B) = B$.

3) $\dots$
 $v^2 e_1 = B^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$

3) ana. $B^3 = (A - 2I_3)^3 = \chi_A(A) = 0$
 $\Rightarrow B^3 = 0$

$\alpha \quad B^2 e_1 \neq 0 \Rightarrow B \neq 0$
 $\Rightarrow B$ nilp. d'indice 3.

$B' = (e_1, v(e_1), v^2(e_1))$ base de $\mathbb{R}^3$

$\text{Mat}(v, B') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{Mat}(v, B_C) = P_{B \rightarrow B'} \cdot \text{Mat}(v, B') \cdot P_{B' \rightarrow B_C}$

$\stackrel{B}{=} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

$\Rightarrow A = 2I_3 + B = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$
 $\stackrel{PP^{-1}}{=}$

Exercice 5:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

1) $\chi_A(x) = (x+2)(x-1)^2$

$\dim E_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I_3)$

$$= 3 - \operatorname{rg}(A - \lambda I_3)$$

or $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

$$= 2$$

$$\Rightarrow \dim E_\lambda = 1 \neq \operatorname{mult}(\lambda)$$

$\Rightarrow$ Matrice non diagonalisable

2) $\ker(A - I_3)^2 = \operatorname{vect}\left(v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

3) Rq. A semblable à $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

$$a = -2 \text{ et } b = 1$$

soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\operatorname{Mat}(f, B) = A$.

Trouver $B' = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\operatorname{Mat}(f, B') = T = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix}$$

$$f(v_1) = -2v_1 \Rightarrow v_1 \in E_{-2} = \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = v_2 \Rightarrow v_2 \in E_1 = \operatorname{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ona $\chi_A(x) = (x+2)(x-1)^2$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = \ker(A+2I_3) \oplus \ker(A-I_3)^2$

$\ker(A-I_3)^2$ stable for A .

$\cdot \ker(A+2I_3) = \text{vect}(U_1)$

$\cdot U_2 \in \ker(A-I_3) \subset \ker(A-I_3)^2$

$\cdot U_3 \in \ker(A-I_3) \in \ker(A-I_3)^2$

$U_3 = dU_1 + bU_2$

$(-2, 0, 3)$ base for $\ker(A-I_3)^2$

(U_1) base for $\ker(A+2I_3)$

(U_1, U_2, U_3) base for $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow B' = (U_1, U_2, U_3)$

$\text{Mat}(f, B') = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on prend. $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $A \cdot U_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = U_3 - 2U_2$

$\Rightarrow \text{Mat}(f, B') = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6.

e) (i) $U_k: F_k \rightarrow F_k$; $F_k = \ker(U - d_k \text{id})^{m_k}$

$U_k = H_k + N_k = d_k \text{id}_{F_k} + N_k$

3/a) d'après 1.)

$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i = F_k \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p F_i$

Not 1-p.s. F_i stable par U a.

$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^p F_i$ stable par U

*. On a. $U_k - d_k \text{id}_{F_k} = N_k$

$\Rightarrow (U_k - d_k \text{id}_{F_k})^{m_k} = 0$

$\Rightarrow P(X) = (X - d_k)^{m_k}$ est un polynôme

annulateur de U_k

$\Rightarrow \text{Sp}(U_k) \subset \{d_k\}$

or $K = \mathbb{C} \Rightarrow \text{Sp}(U_k) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \text{Sp}(U_k) = \{d_k\}$.

ou bien.. $U_k = d_k \text{id}_{F_k} + N_k$

or $N_k \text{ nilp} \Rightarrow \text{Sp}(N_k) = \{0\}$

$\Rightarrow \text{Sp}(U_k) = \{d_k\}$.

Pp. $\dim F_k = \text{mult}(d_k) = m_k$

On a $E = F_k \oplus G$

Soit $B = (B_k, B_G)$ base adaptée.

G stable par U et F_k stable par

$$\text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} \text{Mat}(U_{F_k}, B_k) & 0 \\ 0 & \text{Mat}(U_G, B_G) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$\chi_U(X) = (X - d_k)^{\dim F_k} \cdot \chi_{U_G}(X)$

Supp $\chi_{U_G}(d_k) = 0 \Rightarrow d_k \text{ v.p. de } U_G$.

$\Rightarrow \exists x \neq 0 \text{ de } U_G(x) = d_k x$

$\Rightarrow x \in G$ et $x \in \ker(U - d_k \text{id}_E) \Rightarrow \ker U = d_k$.

$\Rightarrow x \in G \cap F_k = \{0\}$ absurde

$\Rightarrow \chi_{U_G}(d_k) \neq 0 \Rightarrow \text{mult}(d_k) = \dim F_k$

$$u) a) \prod_{i=1}^p X_{\mathbb{A}^1}^{(i)} = \prod_{i=1}^p (X - d_i)^{m_i}$$

N_k ist niep d'indice m_k .

$$b) \text{ on a } E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$$

• F_k stable par U

• $U_k: F_k \rightarrow F_k$; $U_k = \text{Id}_{F_k} + N_k$

N_k niep d'indice $m_k = \dim F_k$

$$\Rightarrow \exists B_k \text{ bas de } F_k \text{ tq } \text{Mat}(N_k, B_k) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{m_k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Mat}(U_k, B_k) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}_{F_k}$$

$$\Rightarrow \exists B = (B_1, \dots, B_p) \text{ bas de } E.$$

$$\text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} \text{Mat}(U_1, B_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \text{Mat}(U_p, B_p) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Id}_{F_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \text{Id}_{F_p} \end{pmatrix}$$

Problème "Décomposition de Dunford"

$$X_U(X) = \prod_{i=1}^p (X - d_i)^{m_i}$$

$$1) \mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^p F_k; F_k = \ker (U - d_k \text{Id}_{\mathbb{C}^n})^{m_k}$$

$$\text{soit } \Phi_k(X) = \prod_{i \neq k} (X - d_i)^{m_i}$$

ona $(\Phi_1, \dots, \Phi_p)$ sont premiers entre eux.
Alors $\exists R_1, \dots, R_p$ des poly. tq.

$$\sum_{k=1}^p R_k \Phi_k = 1$$

$$2) \text{ soit } \pi_k = (\Phi_k R_k)(U) \in \mathcal{L}(F_k)$$

$$\text{ona } \sum_{k=1}^p R_k \Phi_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^p (\Phi_k R_k)(U) = \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^p \pi_k = \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$$

$$3) k, n \in \{1, \dots, p\} \text{ tq } k \neq n$$

$$\text{soit } v \in F_k \Leftrightarrow (U - d_k \text{Id}_{\mathbb{C}^n})^{m_k}(v) = 0$$

$$\pi_n(v) = (R_n \Phi_n)(U)(v)$$

$$= R_n(U) (\Phi_n(U)(v))$$

$$\text{or } \Phi_n(U)(v) = \prod_{i \neq n} (U - d_i)^{m_i}(v)$$

$$= \left(\prod_{i \neq n} (U - d_i)^{m_i} \right) \left(\underbrace{(U - d_k)^{m_k}}_{=0} (v) \right)$$

$$= 0 \Rightarrow R_n(U) (\Phi_n(U)(v)) = 0$$

$$\Rightarrow \pi_n(v) = 0$$

b) soit $v \in F_k$ on a.

$$\pi_k = \text{id}_{\mathbb{C}^n} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \pi_i$$

$$\Rightarrow \pi_k(v) = v - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \pi_i(v)$$

$$\Rightarrow \pi_k(v) = 0, \forall v \in F_k$$

c) on a $\mathbb{C}^n = F_k \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p F_i$

$\forall x \in \mathbb{C}^n; x = y + z$ avec $y \in F_k, z \in \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p F_i$

$$\Rightarrow \pi_k(x) = \pi_k(y) + \pi_k(z)$$

or $y \in F_k \Rightarrow \pi_k(y) = y$

$z \in \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p F_i \Rightarrow z = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p z_i, z_i \in F_i$

$$\Rightarrow \pi_k(z) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \pi_k(z_i) = 0$$

$\Rightarrow \pi_k$ est une projection sur $F_k // \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p F_i$

4) soit $d = d_1 \pi_1 + \dots + d_p \pi_p$

$\therefore F_k$ est stable par d .

car $\forall v \in F_k; d(v) = d_k \cdot v \in F_k$

Soit $d_k: F_k \rightarrow F_k$ l'endo induit par d sur F_k .

$$d_k(v) = d(v) = d_k v \Rightarrow d_k = d_k \text{id}_{F_k}$$

$\Rightarrow d_k$ est diagonalisable.

on a $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$

$\exists B = (B_1, \dots, B_p)$ base de E .

Alors $(d, B) = \begin{pmatrix} d_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_p I_{n_p} \end{pmatrix}$

avec $n_k = \dim F_k$.

5) soit $n = U - d$.

1) soit $v \in F_j = \ker(U - d_j)^{m_j}$

$$\Rightarrow (U - d_j)^{m_j}(v) = 0$$

ona $n(v) = (U - d)(v) \quad \underline{\forall v \in F_j}$

$$= U(v) - d(v)$$

$$= U(v) - d_j(v)$$

$$n(v) = (U - d_j)(v)$$

$$\Rightarrow n = U - d_j \text{ sur } F_j$$

$$\Rightarrow n^{m_j} = \underbrace{(U - d_j)^{m_j}}_{=0} \text{ sur } F_j$$

$$\underline{n^{m_j}(v) = 0, \forall v \in F_j}$$

6) soit $m = \max\{m_j; j \in \{1, \dots, p\}\}$

$$\Rightarrow \dots n^m(v) = 0, \forall v \in F_j, \quad \underline{\forall j \in \{1, \dots, p\}}$$

$$\Rightarrow \forall v \in \mathbb{C}^n, v = \sum_{i=1}^p v_i$$

$$n^m(v) = \sum_{i=1}^p \underbrace{n^m(v_i)}_0 = 0 \in \mathbb{C}^n$$

$$\Rightarrow \underline{n \text{ nilp}}$$

Ainsi:

$U \in \mathcal{M}(\mathbb{C}^n)$ et U est nilp.

$\Rightarrow \exists d$: diagonale

$\exists n \text{ nilp}$

$$\text{soit } \underline{U = n + d} \text{ et } \underline{n \text{ od} = \text{don.}}$$

$$n = P(U)$$

$$d = \Phi(U)$$

c) d' diagonalisable $\Leftrightarrow d' \circ u = u \circ d'$

a) $F_k = \ker (u - d_k \text{id}_n)^{m_k}$ est stable par d'

b) soit $d'_k: F_k \rightarrow F_k$ l'endo induit

d' est diag $\Rightarrow d'_k$ est diagonalisable

$\Rightarrow \exists B'_k$ base de F_k formée de v_p de d'_k

$\Rightarrow B' = (B'_1, \dots, B'_p)$ est formée de v_p de d'

on $\text{Mat}(d', B') = \begin{pmatrix} d_1 \text{id}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_p \text{id}_{n_p} \end{pmatrix}$

car $d'_k = d_k \text{id}_{F_k}$ sur F_k

7) l'existence, d'après 5)

unicité

Supp. $\exists d'$ diag
 $\exists n'$ nilp $\Leftrightarrow$

$u = n' + d'$ avec $n' \circ d' = d' \circ n'$

ou $u = n + d$ avec $n \circ d = d \circ n$

$\Rightarrow n' - n = d - d'$

on d diag et d' diag

De plus $d' \circ u = d' \circ (d' + n')$
 $= d' \circ d' + d' \circ n'$
 $= d' \circ d' + n' \circ d'$
 $= (d' + n') \circ d'$
 $= u \circ d'$

$$N \text{ nilp et } A^{-1} N = N A^{-1} \Rightarrow A^{-1} N \text{ nilp}$$

$$\Rightarrow A^{-1} D = I_n - A^{-1} N$$

$$\Rightarrow \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^{-1} D) = \{1\} \text{ car } \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A^{-1} N) = \{0\}$$

$$\Rightarrow A^{-1} D \text{ inversible} \Rightarrow D \text{ inversible}$$

Autremt

$$N^P = 0_n$$

$$A = D + N \Rightarrow A^P = (D + N)^P$$

$$= \sum_{k=0}^P \binom{P}{k} D^k N^{P-k}$$

$$A^P = D \cdot \sum_{k=0}^P \binom{P}{k} D^{k-1} N^{P-k} \quad (k=0 \text{ term is } D^P)$$

$$\Rightarrow D \cdot \sum_{k=0}^P \binom{P}{k} D^{k-1} N^{P-k} = D \cdot \sum_{k=0}^P \binom{P}{k} D^k N^{P-k} \quad (k=0 \text{ term is } D^P)$$

$$(A^{-1})^P = I_n$$