

$$U(F) \subset F$$

$$\forall x \in F, U(x) \in F$$

$$\text{si } F = \text{vect}\{e_1, \dots, e_n\}$$

$$F \text{ stable par } U \Leftrightarrow$$

$$U(e_i) \in F, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{si } U_0 U = U_0 I$$

Alors: $\ker U$ et $\text{Im } U$ sont stables par U

$$\text{si } \lambda \text{ v.p. de } U$$

$$E_\lambda(U) = \ker(U - \lambda \text{id})$$

est stable par U .

$$\text{car } (U - \lambda \text{id}) \circ U = U \circ (U - \lambda \text{id})$$

si F et G sont stables par U , alors $F \cap G$ et $F + G$ " "

F sous espace de E :

stable par $U \in \mathcal{L}(E)$

on définit l'endo.

$$U_F: F \rightarrow F \text{ induit par } U \text{ rest.}$$

$$\dim \Leftrightarrow \exists B \text{ base de } F$$

$$\text{tg } \ker(U, B) = \left(\begin{array}{c|c} A = \text{Mat}(U_F) & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

$$F = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des VP et $\lambda \neq$.

Par $\sum_{i=1}^p E_{d_i} = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}$

Pour $p=1$, vrai.

Soit $p \geq 2$; Supp $E_{d_1}, \dots, E_{d_p}$ sont en somme directe et mg $E_{d_1}, \dots, E_{d_{p+1}}$ sont en somme directe.

Soit $x_i \in E_{d_i}, \forall i \in \{1, \dots, p+1\}$ tq

$x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} = 0_E$ (1)

$\Rightarrow \forall x_1 + \dots + x_{p+1} = 0_E$

$\sum_{i=1}^{p+1} d_i x_i = 0$ (2)

(1) $\times d_{p+1}$ (2) $\Rightarrow \sum_{i=1}^p (d_{p+1} d_i) x_i = 0$

or $x_i \in E_{d_i} \Rightarrow (d_{p+1} d_i) x_i \in E_{d_i}$
et $E_{d_1}, \dots, E_{d_p}$ sont s.d.

$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\}; (d_{p+1} - d_i) x_i = 0_E \Rightarrow x_i = 0_E$

$\lambda \forall p \in U \Leftrightarrow \exists x \in E \text{ s.t. } U(x) = \lambda x$

$\ker(U - \lambda \text{id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow U - \lambda \text{id} \text{ n'est pas injective}$

$\Leftrightarrow \dim E < \infty$

$U - \lambda \text{id}$ n'est pas bijectif
 $\Leftrightarrow \det(U - \lambda \text{id}) = 0$
 $\Leftrightarrow \lambda$ racine de χ_U ($\chi_U(\lambda) = 0$)
 $\chi_U(x) = \det(x I_n - \text{Mat}(U, B))$
 $\Leftrightarrow \lambda$ v.p. de $\text{Mat}(U, B)$

Si λ v.p. de $U \Rightarrow \exists$ fin. ds v.p. de U associees a λ
 $\sum p \lambda$

$E_\lambda = \ker(U - \lambda \text{id}) = \{x \in U \mid U(x) = \lambda x\}$
 est un s.e. U .
 $\rightarrow$ si $x \in E_\lambda$ v.p. de U associee a λ
 ditto; λx " "
 $\rightarrow$ si $x, y \in E_\lambda$ " "
 $\Rightarrow x+y \in E_\lambda$ v.p. associee a λ ($x+y \neq 0$)

Valeurs propres et sous-espace propres de $U \in \mathcal{L}(E)$.
 E est un K.e.o.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des v.p. r.e. et $\neq$.
 Alors les s.e. propres sont en s.e. directs:
 $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$

Si $(x_1, \dots, x_p)$ sont des v.p. associees a des v.p. r.e. et $\neq$.
 Alors e_B est libre.

Si $\dim E < \infty \Rightarrow \text{car}(\mathcal{P}(U)) \cong \mathcal{M}_n(K)$

Si $\dim E < \infty$
 1. $\dim E_\lambda(U) \leq \text{mult}(\lambda)$
 avec λ v.p. de U

Si λ v.p. simple ($\text{mult}(\lambda) = 1$)
 $\Rightarrow \dim E_\lambda(U) = 1$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}: (d_{ii} - \lambda_i) x_i = 0 \Rightarrow x_i = 0 \in \mathbb{C}$$

$$\rightarrow \text{si } A \in M_n(\mathbb{C}) \rightarrow Sp_{\mathbb{C}}(A)$$

$$\rightarrow \text{si } A \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C}) \rightarrow Sp_{\mathbb{R}}(A)$$

$$\rightarrow Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$$

Exercice 1:

$$U: \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P \mapsto U(P) = XP + (1-X^2)P'$$

1) Si P est un VP de U associée à une VP $\lambda \in \mathbb{R}$; soit $n = \deg P \neq 0$
 Coef dom $P = a_n \neq 0$
 $\Leftrightarrow U(P) = \lambda P$
 Si $\lambda \neq 0$.

$$\deg(U(P)) = \deg(\lambda P) = n.$$

Alors Coef de X^{n+1} dans $U(P)$ est
 $a_n - na_n = 0 \Leftrightarrow (n-1)a_n = 0$
 $\Leftrightarrow n=1$

$$\Rightarrow \deg P = 1$$

$$\# \text{ Si } \lambda = 0 \Rightarrow U(P) = 0$$

$\Rightarrow$ tous les coef de $U(P)$ sont nuls

$$\Rightarrow \text{Coef de } X^{n+1} \text{ est } 0$$

$$(n-1)a_n = 0 \Rightarrow n=1$$

e) On a $\mathbb{R}_1[X] = \text{vect}(1, X)$
 et

$$U(1) = X \in \mathbb{R}_1[X]$$

$$U(X) = 1 \in \mathbb{R}_1[X] \Rightarrow$$

$\mathbb{R}_1[X]$ est stable par U .

3) $U_1: \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$ l'endo induit par U sur $\mathbb{R}_1[X]$
 $P \mapsto U_1(P) = U(P)$
 $B_1 = (1, X)$ base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$

$$\text{Mat}(U_1, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$X_{U_1}(x) = X_{U_1}(A) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \\ = x^2 - 1.$$

$$Sp(U_1) = \{-1, 1\}$$

$$E_1(U_1) = \ker(U_1 - id_{U_1})$$

$$\text{such } P(x) = \alpha x + b \in E_1(U_1)$$

$$\Leftrightarrow U_1(P) = P$$

$$\Leftrightarrow x(\alpha x + b) + (-x-1)\alpha = \alpha x + b$$

$$\Leftrightarrow bx + \alpha = \alpha x + b$$

$$\Leftrightarrow \alpha = b$$

$$\Rightarrow P(x) = \alpha(x+1)$$

$$\Rightarrow E_1(U_1) = \text{vect}(P_1 = x+1)$$

$$\hookrightarrow E_{-1}(U_1) = \text{vect}(P_2 = x-1).$$

Auftrag

$$P(x) = \alpha x + b \Rightarrow \text{Mat}(P, B_1) = \begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$U_1(P) = P \Leftrightarrow_{\text{matrix}} A \begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = b$$

$$4.) \text{ Also } Sp(U_1) \subset Sp(U)$$

$$\Leftrightarrow \{-1, 1\} \subset Sp(U)$$

$$"\supset" \text{ Sei } \lambda \in Sp(U) \Rightarrow \exists P \neq 0 \text{ s.}$$

$$U(P) = \lambda P, \text{ D'après 1/ } P \in \mathbb{R}_1[x]$$

$$\Rightarrow U(P) = U_1(P) = \lambda P \Rightarrow \lambda \in Sp(U_1)$$

$$\Rightarrow Sp(U) = \{-1, 1\}$$

$$\Rightarrow \lambda \in \{-1, 1\}$$

Exercice 4. Soit un R.e.v.

B base de E ; $\dim E = n$.

$A = \text{Mat}(f, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1) f admet une droite vectorielle.

Stable noté $D = \text{vect}(x)$ avec $x \neq 0_E$.

$$f(D) \subset D \Leftrightarrow f(x) \in D$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{Sp}(f) \neq \emptyset$$

e) hyp $\text{Sp}(f) = \emptyset$.

a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$\Rightarrow \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$. On considère

$\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow \exists z \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ tel que

$$Az = \lambda z$$

$$b) z = x + iy; x, y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$x \in E \hookrightarrow \text{Mat}(x, B) = X$$

$$y \in E \hookrightarrow \text{Mat}(y, B) = Y$$

soit $Az = \lambda z$; on pose $\lambda = \alpha + i\beta$

$$A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y \\ AY = \alpha Y + \beta X \end{cases} \quad (1)$$

$$AY = \alpha Y + \beta X \quad (2)$$

Soit $P = \text{vect}(x, y)$

$$(1) \Rightarrow f(x) = \alpha x - \beta y \in P$$

$$(2) \Rightarrow f(y) = \alpha y + \beta x \in P$$

Donc P est stable par f

Exp $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$S_p(A) = ?$
 $\mathbb{R}$.

$\chi_A(x) = x^2(x-3)$

0 vp avec mult(0) = 2
 3 vp simple.

$E_0 = ??$

soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0 \Leftrightarrow Ax = 0$

$\Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow z = -x-y$

$\Rightarrow E_0 = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$E_3 = ??$

$Ax = 3x$

$\begin{cases} x+y+z=3x \\ x+y+z=3y \\ x+y+z=3z \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$

$E_3 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\rightarrow \Pi_{\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3 = E_0 \oplus E_3$

car E_0 et E_3 sont en l'intersection
 et dans $E_0 \cap E_3 = \{0\}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = E_0 \oplus E_3$

$\rightarrow$ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ avec $\text{Mat}(f|_E) = A$.

Soit $B' = B_0 \cup B_3$ avec $B_0 = \text{base de } E_0$
 $B_3 = \text{base de } E_3$

$B_0 = (v_1, v_2)$
 $B_3 = (v_3)$

$$\text{Nat}(f, B') = \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \\ \textcircled{0} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{0} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} = D$$

$$\text{Nat}(f, B) = P_{B \rightarrow B'} \cdot \text{Nat}(f, B') \cdot P_{B' \rightarrow B}$$

$$\underline{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$$

Question

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et d.v.p de A

1) Nq la suite $(\dim \ker(A - \lambda I_n)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est ↗

Nq la suite $(\dim \ker(A - \lambda I_n)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Réponse

2) Soit $n_p = \dim \ker(A - \lambda I_n)^p \in \mathbb{N}$.
d'après 1/ la suite $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une
suite croissante d'entiers naturels.

La p.l.s est majorée par $n = \dim M_n(\mathbb{C})$

Alors la suite $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est stationnaire

⇒ $\exists p_0 \in \mathbb{N}$ tq $n_p = n_{p_0}, \forall p \geq p_0$

⇒ $\dim \ker(A - \lambda I_n)^p = \dim \ker(A - \lambda I_n)^{p_0}$

or $\ker(A - \lambda I_n)^{p_0} \subset \ker(A - \lambda I_n)^p$

⇒ $\ker(A - \lambda I_n)^p = \ker(A - \lambda I_n)^{p_0}, \forall p \geq p_0$

Question

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$

1) Montrer que la suite $(\dim \ker(A - \lambda I_n)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est stationnaire

Montrer que la suite $(\dim \ker(A - \lambda I_n)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Réponse

2) Soit $n_p = \dim \ker(A - \lambda I_n)^p \in \mathbb{N}$.
D'après 1) la suite $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.

La suite est majorée par $n = \dim M_n(\mathbb{C})$.

Alors la suite $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

$\Rightarrow \exists p_0 \in \mathbb{N}$ tq $n_p = n_{p_0}, \forall p \geq p_0$

$\Rightarrow \dim \ker(A - \lambda I_n)^p = \dim \ker(A - \lambda I_n)^{p_0}$

or $\ker(A - \lambda I_n)^{p_0} \subset \ker(A - \lambda I_n)^p$

$\Rightarrow \ker(A - \lambda I_n)^p = \ker(A - \lambda I_n)^{p_0}, \forall p \geq p_0$

Exercice 2.

3) $F_A: x(x-1)y' - (nx+d)y = 0, x \in \mathbb{R}^+$

$$\Leftrightarrow y' - \frac{(nx+d)}{x(x-1)} y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \alpha \cdot \frac{(x-1)^{n+d}}{x^d} = \alpha (x-1)^{n+d} x^{-d}$$

$$y \text{ polynôme} \Leftrightarrow \begin{cases} n+d \in \mathbb{N} \\ -d \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+d \in \mathbb{N} \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda \geq -n. \\ \lambda \leq 0 \\ \lambda \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

U

$$\Rightarrow d \in \{-n, -1, \dots, 0\}.$$

$$\Rightarrow Sp(U) \subset \{-n, -1, \dots, 0\}$$

" $\supset$ " soit $d \in \{-n, -1, \dots, 0\}$

$$\Rightarrow \exists P = \frac{(x-1)^{n+d}}{x^d} \in (R_n[x] \setminus \{0\})$$

et vérifie $F_d \Rightarrow U(P) = dP$

Exercice 5.

$$H: S_n(\mathbb{R}).$$

$$\Phi: T_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$\pi \mapsto A\pi - \pi A.$$

$$x \neq 0_{n1} \hookrightarrow Ax = \lambda x.$$

$$y \neq 0_{n1} \hookrightarrow Ay = \mu y; \pi_{xy} = x^t y$$

$$(\pi_{xy})_{ij} = x_i y_j.$$

$$0_{n1} \cdot x \neq 0_{n1} \Rightarrow \exists i_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ t.q. } x_{i_0} \neq 0$$

$$y \neq 0_{n1} \Rightarrow \exists j_0 \in \{1, \dots, n\} \text{ t.q. } y_{j_0} \neq 0$$

$$\Rightarrow x_{i_0} y_{j_0} \neq 0 \Rightarrow (\pi_{xy})_{i_0 j_0} \neq 0$$

$$\Rightarrow \pi_{xy} \neq 0_n.$$

$$a) \Gamma = \{ \lambda - \mu; \lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(A); \mu \in Sp_{\mathbb{R}}(A) \}$$

$$\text{soit } \alpha \in \Gamma \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in Sp_{\mathbb{R}}(A) \text{ t.q.}$$

$$\alpha = \lambda - \mu.$$

$$Ax = \lambda x \text{ et } Ay = \mu y.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{d'après b)} \\ \Rightarrow \pi_{xy} \neq 0_n \end{array} \right.$$

$$\Phi(\pi_{xy}) = A\pi_{xy} - \pi_{xy}A.$$

$$= A x^t y - x^t y A.$$

$$= \lambda x^t y - x^t (\mu y)$$

$$= \lambda x^t y - x^t \mu y = (\lambda - \mu) \pi_{xy}.$$

$$\Rightarrow \alpha \in Sp(\Phi)$$

$$\Rightarrow \Gamma \subset Sp(\Phi)$$

$$c) \pi \neq 0_n \text{ t.q. } \Phi(\pi) = \alpha \pi.$$

Supp. que $\forall V$ vecteur propre de A on a. $\Pi.V = 0_{n \times 1}$ oue. $\Phi(\Pi) = \alpha \Pi$.

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}; \Pi V_i = 0_{n \times 1}$$

Puisque $B = (V_1, \dots, V_n)$ base de $\Pi_{n \times 1}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \Pi X = 0, \forall X \in \Pi_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \ker \Pi = \Pi_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \Pi = 0_n \text{ absurde.}$$

ou bien

$$\Pi X = 0_{n \times 1} \Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\}; \Pi e_j = 0 \text{ avec } e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

$$\Pi e_j = 0_{n \times 1} \text{ colonne } j$$

$$\text{Alors } \exists Z_0 \vec{v}_p \text{ de } A \text{ tq. } \Pi Z_0 \neq 0_{n \times 1}$$

$$\text{on pose. } AZ_0 = p Z_0.$$

$$\Leftrightarrow A\Pi - \Pi A = \alpha \Pi.$$

$$\Rightarrow A\Pi Z_0 - \Pi A Z_0 = \alpha \Pi Z_0$$

$$A\Pi Z_0 = \Pi p Z_0 + \alpha \Pi Z_0 = (\alpha + p) \Pi Z_0$$

$$\text{et on a. } \Pi Z_0 \neq 0_{n \times 1}$$

$$\Rightarrow \Pi Z_0 \vec{v}_p \text{ de } A.$$

$$\text{on pose. } \alpha + p = \lambda \in \text{Sp}(A)_{\mathbb{R}}$$

$$5) \text{ on a. d'après 2/}$$

$$\Gamma \subset \text{Sp}(\Phi)$$

$$\text{d'après 4/ si } \alpha \in \text{Sp}(\Phi) \Rightarrow \alpha = \lambda - \mu$$

$$\text{avec } \lambda, \mu \in \text{Sp}(A) \Rightarrow \alpha \in \Gamma$$

$$\therefore \Rightarrow \text{Sp}(\Phi) \subset \Gamma$$

$$\text{Ainsi } \text{Sp}(\Phi) = \Gamma.$$

Rappel.

$$\mathcal{L}(E).$$

$$P \in K[X]; \quad P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

on définit

$$P(U) = \sum_{k=0}^n a_k U^k \in \mathcal{L}(E)$$

$$\rightarrow \forall P, Q \in K[X].$$

$$(P+Q)(U) = P(U) + Q(U).$$

$$(P \times Q)(U) = P(U) \circ Q(U)$$

$$\begin{matrix} \text{"} \\ \Phi \times P \end{matrix} = \Phi(U) \circ P(U)$$

$$\rightarrow \text{Si } P \in K[X] \text{ et vérifie } P(U) = 0$$

on dit que P est un polynôme annulateur

Th. de Cayley Hamilton

Soit $U \in \mathcal{L}(E)$; don $E \leftarrow$

$$\text{Alors } \chi_U(U) = 0$$

Exercice 6 :

1) F stable par U .

$U_F: F \rightarrow F$ l'endomorphisme induit par U sur F .

Alors χ_{U_F} divise χ_U .

2) $x \neq 0 \in F$.

Il $\exists p \leq n-1$ tel que $(x, U(x), \dots, U^{p-1}(x))$ est libre.
 $U^p(x) \in Fx = \text{vect}(x, U(x), \dots, U^{p-1}(x)).$

Soit $I = \{k \in \mathbb{N}^* \mid (x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$

$x \neq 0 \Rightarrow 1 \in I \Rightarrow I \neq \emptyset$

$\therefore I \subset \mathbb{N}$

$\forall k \in I \Rightarrow k \leq n \Rightarrow I \text{ est majorée}$

I admet un max. on note $p = \max I$

$p = \max I \Rightarrow p \in I$

$\Rightarrow (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)) \text{ est libre.}$

et $p+1 > p \Rightarrow (x, u(x), \dots, u^p(x)) \text{ est liée}$

$\Rightarrow u^p(x) \in \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)) = F_x$

Propos. on déduit que $\forall k \geq p, u^k(x) \in F_x$.

Par récurrence

Pour $k = p, u^p(x) \in F_x$

Soit $k \geq p$; supposons $u^k(x) \in F_x$
et Tq $u^{k+1}(x) \in F_x$

On a: $u^k(x) \in F_x = \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$

$\Rightarrow u^{k+1}(x) \in \text{vect}(u(x), \dots, u^p(x), u^p(x))$

or $u^p(x) \in \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$

$\Rightarrow u^{k+1}(x) \in \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$

g) Sei $F_x = \text{Vect}(x, U(x), \dots, U^{p-1}(x))$.
 $1 \leq k \leq p-2$; $U(U^k(x)) = U^{k+1}(x) \in F_x$.
 $U(U^{p-1}(x)) = U^p(x) \in F_x$.

$\Rightarrow F_x$ ist stabil par U .

4) Sei $\mathcal{B}: F_x \rightarrow F_x$.
 $y \mapsto \mathcal{B}(y) = U(y)$
 findet eindeutig par U auf F .

a) $\chi_{\mathcal{B}} = ??$

Sei: $B = (x, U(x), \dots, U^{p-1}(x))$ basis F_x .
 $\Rightarrow \text{Mat}(\mathcal{B}, B) =$

$$U^p(x) \in F_x \Rightarrow U^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k U^k(x)$$

$$\chi_{\mathcal{B}}(x) = \begin{vmatrix} x & -a_0 & & \\ & x & -a_1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x - a_{p-1} \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + xL_2 + x^2L_3 + \dots + x^{p-1}L_p$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & -1 & & 0 & P(x) \\ x & & & & -a_1 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & x - a_{p-1} \end{vmatrix}$$

oder $P(x) = x^p - a_{p-1}x^{p-1} - \dots - a_0$
 und da $\% a_i \in \mathbb{F}$ lig

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{B}}(x) = (-1)^{p-1} P(x)$$

$$\Rightarrow \chi_{\mathcal{B}}(x) = P(x)$$

$$\begin{vmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & \ddots & \\ & & & x \end{vmatrix} = x^p$$

$$3) \text{ on a } X_U(\omega)(x) = P(\omega)(x) \\ = \omega^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k \omega^k(x) = 0_E.$$

De plus X_U divise X_U

$$\Rightarrow X_U = X_U \cdot H(x)$$

$$\Rightarrow X_U(\omega) = H(\omega) \circ X_U(\omega)$$

$$\Rightarrow X_U(\omega)(x) = H(\omega) \left(\underbrace{X_U(\omega)(x)}_{0_E} \right) = 0_E.$$

Alors $\forall x \neq 0_E$; $X_U(\omega)(x) = 0_E$.
 Mais aussi pour $x = 0_E$.

$$\Rightarrow \forall x \in E; X_U(\omega)(x) = 0_E.$$

$$\Rightarrow X_U(\omega) = 0.$$

Problème:

$$A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$\begin{cases} a_{ij} > 0, \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \\ \text{et } \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

1) Pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_n$ et

vérifie $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot 1 = 1 = X_i$

$$\Rightarrow AX = X$$

Autrement:

$$\det(I_n - A) =$$

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & 1-a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^n C_j$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \sum_{j=1}^n a_{1j} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - \sum_{j=1}^n a_{nj} & \dots & \dots & 1 - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(I_n - A) = 0 \Rightarrow \exists v_p \in A$$

a) $X \neq 0$ $\hookrightarrow BX = 0 \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\}$

$$\hookrightarrow |b_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{kj}|$$

avec $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

b) $\lambda \in \text{Sp}_\mathbb{R}(A)$ $B = A - \lambda I_n \neq 0_n$

Soit $B = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = a_{ij} - \lambda \delta_{ij}$

D'après a) $|b_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{kj}|$

$$\Rightarrow |a_{kk} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| = \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} = 1 - a_{kk}$$

ona. $|a_{kk} - \lambda| \leq |a_{kk} - \lambda| \leq 1 - a_{kk}$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq 1$$

3) soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ avec $|\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = e^{i\theta}$.

$$\Rightarrow |a_{kk} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{kk}$$

$$\Rightarrow |a_{kk} - e^{i\theta}|^2 \leq (1 - a_{kk})^2$$

$$(a_{kk} - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \leq 1 + a_{kk}^2 - 2a_{kk}$$

$$\cancel{a_{kk}^2} - 2\cos \theta \cancel{a_{kk}} + 1 \leq 1 + \cancel{a_{kk}^2} - 2\cancel{a_{kk}}$$

$$\Rightarrow \cos \theta \geq 1 \Rightarrow \cos \theta = 1$$

$$\Rightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

u) $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \text{ alors } Sp_{\mathbb{K}}(A) = Sp_{\mathbb{K}}({}^t A)$
 $\Leftrightarrow \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$

$$\Leftrightarrow \det({}^t(\lambda I_n - A)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(\lambda I_n - {}^t A) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}({}^t A)$$

$\rightarrow \dim E_{\lambda}(A) = \dim E_{\lambda}({}^t A)$

$$E_{\lambda}(A) = \ker(A - \lambda I_n)$$

ona. $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) = \operatorname{rg}({}^t A - \lambda I_n)$

D'après th. du rang.

$$\dim \ker(A - \lambda I_n) = \dim \ker({}^t A - \lambda I_n)$$

$\Rightarrow$ soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0_{n \times 1}$. $\epsilon_A \cdot V = V$.

a) $({}^t A \cdot V)_i = v_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow v_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$

$\Rightarrow |v_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ji} |v_j|, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Supp $\exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ t.q. } |v_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ji} |v_j|$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |v_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} |v_j|$

$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} \right) |v_j|$

$\leq \sum_{j=1}^n |v_j|$ absurde

Alon $\forall i \in \{1, \dots, n\}; |v_i| = \sum_{j=1}^n a_{ji} |v_j|$

$\Rightarrow |V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$

D'après a) $\epsilon_A \cdot |V| = |V|$

par l'absurde. $|v_i| > 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

b) a) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in E_2({}^t A)$

$Z = X - \frac{x_1}{y_1} Y \in E_2({}^t A)$

Supp $\forall i, z_i \neq 0$
d'après ce qui précède $z_i \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

absurde car $z_i = 0 \Rightarrow Z = 0$
 $\Rightarrow X = \frac{x_1}{y_1} Y \Rightarrow \dim E_2({}^t A) = 1$

b) On a. d'un $E_1({}^tA) = \mathbb{C} \Rightarrow E_1({}^tA) = \text{vect}(V)$
 D'après) : $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix} \in E_1({}^tA)$

Soit $w_i = \frac{|v_i|}{\sum_{i=1}^n |v_i|} > 0$
 et $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

Soit $\eta = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n |v_i|} \cdot |V| \in E_1({}^tA)$

8) e/ ker Φ stable par f avec.
 $\varphi: X \mapsto AX$.

12 E est un b.e.v.

$\forall E \in \mathcal{K}(E)$: $\dim E < \infty$

Def U est diagonalisable.

$\Leftrightarrow \exists B'$ un base de E .

pour le $\mathbb{T}_P$ de U .

$\Leftrightarrow$

$\exists B'$ base $\Leftrightarrow \text{Mat}(U, B') = D =$
 $(e_1 \dots e_n)$
 $= \text{diag}(d_1 \dots d_n)$

$\rightarrow A \in M_n(K)$ est diagonalisable

$\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$ tq $A = P D P^{-1}$

$\exists D = \text{diagonale}$

$\Leftrightarrow f$ l'endo. de K^n canoniquement associée à A est diagonalisable

$(x \mapsto Ax)$

Theoreme

1) U est diagonalisable.

2) $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}$ avec $d_1, \dots, d_p$ sont les VP de U à 2 à 2.

3) on a $E = \sum_{i=1}^p \dim E_{d_i}$

4) U est normale et $\forall \lambda \in \text{Sp}(U)$
 $\dim E_\lambda = \text{mult}(\lambda)$

$$\Rightarrow \text{happ} \quad E = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}$$

$\exists B = (B_1, \dots, B_p)$ base de E de B_i base de E_{d_i}

formé par des VP de U associées à d_i
 $\Rightarrow B$ base de E formé par des VP de U

$$\text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} d_1 I_{n_1} & & \\ & d_2 I_{n_2} & \\ & & \ddots \\ & & & d_p I_{n_p} \end{pmatrix}$$

avec $n_i = \dim E_{d_i} = \text{mult}(d_i)$

Preuve:

1) $\Rightarrow$ 2)

ma est diagonalisable $\Rightarrow \exists B$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ avec $e_i \in V_p$ de $\mathbb{C}$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}; e_i \in V_p \text{ d.u.} \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{C}$

$\forall i \in \{1, \dots, n\}; \lambda_i = d_i \Rightarrow e_i \in E_{d_i}$

$\Rightarrow e_i \in \bigoplus_{k=1}^p E_{d_k} \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{F}$

$\Rightarrow E \subset F = \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{C} e_i \Rightarrow F = \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{C} e_i$

2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4)

Prop. - Est diagonalisable

Alors $\exists B'$ base de E tq.

$$\text{Mat}(A, B') = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_p \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_A(X) = \prod_{i=1}^p (X - d_i)^{m_i} \quad (\text{avec } m_i = \text{mult}(d_i))$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p m_i = n = \dim E = \deg \chi_A$$

d'après), $\dim E = \sum_{i=1}^p \dim E_{d_i}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \dim E_{d_i} = \sum_{i=1}^p m_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p (\dim E_{d_i} - m_i) = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\}; \dim E_{d_i} = m_i$$

Prop
 $\rightarrow$ Si X_U est scindé et si racines simples
 Alors U est diagonalisable
 $\rightarrow U$ admet n v.p. $\lambda \neq 0$ ($n = \dim E$)

$\Rightarrow$ Si U est diagonalisable
 et $Sp(U) = \{1\}$
 Alors $U = \lambda Id_E$

$\rightarrow$ $\exists B$ base de E tq $Mat(U, B) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$
 $= \lambda Id_n$

Exercice 2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_A(X) = (X-1)(X-2)^2 \quad E_1 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

X_A est scindé: (X)

$$E_2 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\dim E_2 = 2 = \text{mult}(2)$
 et 1 v.p. simple $\Rightarrow \dim E_1 = 1$
 Alors A est diagonalisable.

Soit f l'endo canoniquement associée à A .
 $Mat(f, B) = A$. $f: X \mapsto AX$.

fest diagonalisierbar.

$$\mathbb{R}^3 = E_2 \oplus E_1$$

$$\Rightarrow \exists B' = (v_1, v_2, v_3) \text{ base of } \mathbb{R}^3$$

$$\text{Mat}(f, B') = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}(f, B) = P_{B \rightarrow B'} \text{Mat}(f, B') \cdot P_{B' \rightarrow B}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$\text{also } P = P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1

a) $U \in \mathcal{L}(E)$; $\dim E < \infty$
 $\forall p \leq \dim U$; ...

Th 1. $\dim E_d \leq \text{ma}(\ell(d))$

Réponse : on a $\forall p \leq \dim U \Leftrightarrow E_d \neq \{0\}$
 $\Rightarrow \dim E_d \geq 1$.

• On a $E_d = \ker(U - d \text{id}_E)$ est stable par U .

Soit $U_d: E_d \rightarrow E_d$ l'endo induit
 $x \mapsto U_d(x) = U_x$ par U sur E_d .

Abs U_d divise U
 $\text{a } U_d(x) = (X-d)^p U$

avec $p = \dim E_d$

$$(X-d)^p / U(x) = (X-d)^m \cdot Q(X) \quad \text{avec } Q(d) \neq 0$$

$$m = \text{ma}(\ell(d))$$

$$\text{a } (X-d)^p \wedge Q = 1$$

Gauss $(X-d)^p / (X-d)^m$

$$\Rightarrow p \leq m.$$

$$\dim E_d \leq \text{ma}(\ell(d))$$

Exercice 2: $U \in \mathcal{L}(E)$ d.c. $E < \infty$
 $\dim \text{sp}(U) < \infty$. $E = E_d \oplus F$.

et F stable par U on pose $U_F: F \rightarrow F$ l'endo induit

Th $\dim E_d = \text{ma}(\ell(d))$.

Réponse : Soit $B = (B_d, B_F)$ base de E adaptée.

$$\text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda & 0 \\ 0 & & & \begin{matrix} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_{\mathbb{R}}(x) = (x-d)^p \chi_{\mathbb{R}}(x) \quad p = \dim E_d$$

$$\text{Supp } q_{\text{un}}. \quad \phi(d) = 0 \Rightarrow \chi_{\mathbb{R}}(d) = 0$$

$$d \vee p \cdot \omega \quad \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \neq 0 \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \chi_{\mathbb{R}}(x) = dx.$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow x \in E_d \Rightarrow x \in F \cap E_d = \{0\} \\ & \quad \quad \quad \downarrow \\ & \quad \quad \quad \chi(x) = dx. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \chi_{\mathbb{R}}(d) \neq 0 \Rightarrow \underline{\mu_F(d)} = p = \dim E_d.$$

→ Si $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \exists X \neq 0 \text{ tel que } AX = \lambda X$

$$\Downarrow$$

$$\lambda^n \in \text{Sp}(A^n)$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow A^n X = \lambda^n X \text{ (remarque)}$$

$$P(\lambda) \in \text{Sp}(P(A)) \text{ avec } P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

$$(P(A)X = \sum_{k=0}^n a_k A^k X$$

$$P(A)X = P(\lambda) \cdot X$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k X = P(\lambda) \cdot X$$

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et P un polynôme annulateur de A

$$\Rightarrow P(\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \text{Sp}(A) \subset \{ \text{les racines de } P \}$

$$p^2 - p = 0$$

$$q(x) = x^2 - x = x(x-1)$$

$$Sp(p) \subset \{0, 1\}$$

$$H(x) = (x-2)(x^2-x)$$

Si $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \exists X \neq 0 \text{ s.t. } AX = \lambda X$

$$\Downarrow \\ \lambda^n \in \text{Sp}(A^n) \\ \Downarrow \\ \Rightarrow A^n X = \lambda^n X \text{ (avec } X \neq 0 \text{)}$$

$P(\lambda) \in \text{Sp}(P(A))$ avec $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$

$$\begin{aligned} (P(A)X) &= \sum_{k=0}^n a_k A^k X \\ P(A)X &= P(\lambda) \cdot X \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k X \\ &= P(\lambda) X \end{aligned}$$

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et P un polynôme annulateur de A

$$\Rightarrow P(\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \text{Sp}(A) \subseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid P(\lambda) = 0 \}$

Exercice 3



$B = (e_1, \dots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{C}^n$
 $\text{Mat}(f, B) = A$

1) $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}; f(e_i) = e_{i+1}$
 $f(e_n) = e_1$

* Par récurrence $f^n(e_i) = e_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$
 $f(e_1) = e_2 \Rightarrow f^2(e_1) = e_3$

$f^k(e_1) = e_{k+1} \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$
 Pour $k = 1$, le résultat est vrai.

Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$ supposez le résultat.

est vrai pour k . et montrons pour $k+1$.

$$f^{k+1}(e_1) = f(f^k(e_1)) = f(e_{k+1}) = e_{k+2}.$$

On doit avoir $f^n(e_1) = f(f^{n-1}(e_1))$
 $k \in \{1, \dots, n\}$ $= f(e_n) = e_1.$

$$\begin{aligned} f^n(e_k) &= f^n(f^{k-1}(e_1)) \\ &= f^{k-1}(f^n(e_1)) \\ &= f^{k-1}(e_1) = e_k. \end{aligned}$$

est vrai pour k , et montrons pour $k+1$.

$$f^{k+1}(e_1) = f(f^k(e_1)) = f(e_{k+1}) = e_{k+2}.$$

On doit avoir $f^n(e_1) = f(f^{n-1}(e_1))$
 $= f(e_n) = e_1.$

$k \in \mathbb{Z} - n\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} f^n(e_k) &= f^n(f^{k-1}(e_1)) \\ &= f^{k-1}(f^n(e_1)) \\ &= f^{k-1}(e_1) = e_k. \end{aligned}$$

e) On a $(e_1, \dots, e_n)$ base de E ,
 et $f^n(e_i) = e_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
 $\Rightarrow f^n = \text{id}_E$

$$\lambda \neq 1$$

$$\ker(A - \lambda I_n)$$

$$\ker(A - \lambda I_n) = \{0\}$$



λ n'est pas VP de A .

$$\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$$



λ VP de A .

est nul pour k . et montrons par réc. que

$$f^{k+1}(e_1) = f(f^k(e_1)) = f(e_{k+1}) = e_{k+2}.$$

On déduit $f^n(e_1) = f(f^{n-1}(e_1))$
 $= f(e_n) = e_1.$

$k \in \{2, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} f^n(e_k) &= f^n(f^{k-1}(e_1)) \\ &= f^{k-1}(f^n(e_1)) \\ &= f^{k-1}(e_1) = e_k. \end{aligned}$$

e) On a $(e_1, \dots, e_n)$ base de E .

et $f^n(e_i) = e_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\Rightarrow f^n = \text{id}_E$$

$$\lambda \in \mathbb{K}$$

$$\ker(A - \lambda I_n)$$

$$\ker(A - \lambda I_n) = \{0\}$$



λ n'est pas VP de A .

$$\ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$$

λ VP de A .

u) $\lambda_k = \frac{\text{tr} A}{n}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

set $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k I_n)$

$\Leftrightarrow AX = \lambda_k X$

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda_k x_1 \\ x_2 = \lambda_k x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda_k x_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda_k^{n-1} x_n \\ x_2 = \lambda_k^{n-2} x_n \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda_k x_n \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_k = \text{vect}(V_k = \begin{pmatrix} \lambda_k^{n-1} \\ \lambda_k^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix})$

b) on a $E_{\lambda_k} = \ker(A - \lambda_k I_n) \neq \{0\}$
 $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow \lambda_k$ est une vp de A , $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

$\Rightarrow A$ admet n vp λ_i $\lambda_i \neq \lambda_j$
 $A \in M_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow A$ est diagonalisable.

c) $\exists B' = (V_0, V_1, \dots, V_{n-1})$ base de $M_n(\mathbb{C})$
 base de V_p de f .

$\text{Mat}(f, B') = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = D$

$\text{Mat}(f, B) = P_{B \rightarrow B'} \text{Mat}(f, B') P_{B' \rightarrow B}$
 $A = P D P^{-1}$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & d_{11}^{n-1} & \dots & d_{1n}^{n-1} \\ \vdots & d_{21}^{n-2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{n1}^1 & \dots & d_{nn}^1 \end{pmatrix}$

Rq.

* A est diagonalisable.

* $\exists P \in GL_n(K) \text{ s.t. } A = P D P^{-1}$

Alors A^n est diagonalisable avec

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

* $\Phi(A)$ est diagonalisable avec

$$\Phi(A) = P \Phi(D) P^{-1}$$

$$\lambda \in \mathbb{D}$$

"

$$\ker(A - \lambda I_n)$$

$$\ker(A - \lambda I_n) = \{0\}$$

$\Downarrow$

λ n'est pas v.p. de A

avec $P = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^{n-1} & \dots & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^{n-2} & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda & \dots & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$

Rq

* A est diagonalisable.

* $\exists P \in GL_n(K)$ tq $A = P D P^{-1}$.

A est diagonalisable avec
 $A^n = P D^n P^{-1}$

* $\Phi(A)$ est diagonalisable avec
 $\Phi(A) = P \Phi(D) P^{-1}$

6) $\Phi: \Pi_n(\mathbb{C}) \rightarrow \Pi_n(\mathbb{C})$

$\pi \mapsto -\pi + \chi(\pi) \cdot A$

a) $\exists d \forall \pi d \in \Phi \Rightarrow \exists \pi \neq 0$ tq $\Phi(\pi) = d\pi$

$\Leftrightarrow -\pi + \chi(\pi) A = d\pi$

$\Rightarrow \chi(-\pi + \chi(\pi) A) = d\chi(\pi)$

$-\chi(\pi) + \chi(\pi) \cdot \chi(A) = d\chi(\pi)$

$\Rightarrow (\lambda + 1)\chi(\pi) = 0$

$\chi(\pi) \neq 0$

$\Downarrow$
 $d = -1$

$\Rightarrow Sp(\Phi) \subset \{-1, 1\}$
 $K = \mathbb{R} \Rightarrow Sp(\Phi) \neq \emptyset$
 $\Rightarrow Sp(\Phi) = \{-1, 1\}$

$\chi(\pi) = 0$

$\Downarrow$
 $d\pi = -\pi \Rightarrow \chi(\pi)\pi = 0$
 $\Rightarrow \chi(\pi) = 0$

b) on a $Sp(\Phi) = \{-1\}$

Supposons Φ est diagonalisable.

Alors $\Phi = -i\pi_n(\pi)$ ce qui est absurde.

Car $\Phi(I_n) = -I_n + nA \neq -I_n$
($A \neq 0_n$)

$\Rightarrow \Phi$ n'est pas diagonalisable.

c) $P(X) = X^2 + 2X + 1$

$\pi_q P(\Phi) = \Phi^2 + 2\Phi + i\pi_n(\pi) = 0$

$\pi_q P(\Phi)(\pi) = 0_n, \forall \pi \in \pi_n(\pi)$

on a $P(\Phi)(\pi) = \Phi(\Phi(\pi)) + 2\Phi(\pi) + \pi$

$= \Phi(-\pi + i\pi(\pi)A) + 2(-\pi + i\pi(\pi)A) + \pi$

$= -\Phi(\pi) + i\pi(\pi)\Phi(A) - \pi + 2i\pi(\pi)A - A$

$= 0_n$

Donc $P(\Phi) = 0$

on retrouve 6-a)

$\rightarrow Sp_{\mathbb{R}}(\Phi) \subset \{racines de P\}$
 $\subset \{-1\}$

et on a $Sp(\Phi) \neq \emptyset \Rightarrow Sp(\Phi) = \{-1\}$

Problème "Commutant d'endo"

$$U \neq 0; \varphi_U: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v \mapsto Uv - vU$$

Partie I.

Soit U endo. de $\mathcal{L}(E)$.

$$\varphi_U(U) = 0 \Rightarrow \ker \varphi_U \neq \{0\} \\ \text{et } U \neq 0.$$

$\Rightarrow \varphi_U$ n'est pas injective.

$\Rightarrow$ " " bijective.

2) $K = \mathbb{R}$ et $Sp(U) = \emptyset$.

a) Soit F un sc. v. b. $\in$ stable par U
tg $\dim F$ est pair.

ona. F stable par U
Soit $U_F: F \rightarrow F$ l'endo induit par U sur F .

$$\Rightarrow Sp(U_F) \subset Sp(U) = \emptyset$$

$$\Rightarrow Sp(U_F) = \emptyset$$

Supp que $\dim F$ est impair.

$$\Rightarrow \deg \chi_{U_F} = \dim F \quad " "$$

$$\chi_{U_F} \in \mathbb{R}[X]$$

$\Rightarrow \chi_{U_F}$ admet au moins une racine réelle.

$$\Rightarrow Sp(U_F) \neq \emptyset \text{ absurde.}$$

b) Soit $u \in \ker \varphi_U \Rightarrow Uou = uou$

$\Rightarrow \ker U$ est stable par U
d'après a) $\dim \ker U$ est pair.

3) U est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.

$\Leftrightarrow U^p = 0$ et $U^{p-1} \neq 0$

$\Downarrow$
 $\exists a \neq 0 \in U^{p-1}(a) \neq 0 \in$

$\Rightarrow U(\underbrace{U^{p-1}(a)}_{\neq 0}) = 0 \Rightarrow \underbrace{U^{p-1}(a)}_{\neq 0} \in \ker U$

$\Rightarrow \ker U \neq \{0\}$

$\Downarrow$
 $0 \subsetneq U^p \subsetneq U$

Rq. 2.

Soit U est nilp. d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.
 Alors $Sp(U) = \{0\}$.

cas $\forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x \neq 0 \in U$ tel que $U(x) = \lambda x$.
 $\Rightarrow \underbrace{U^p(x)}_{=0} = \lambda^p x \Rightarrow \lambda^p x = 0 \Rightarrow \lambda^p = 0$
 $\Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow Sp(U) \subset \{0\}$

Dans $\mathbb{C}$: or $Sp(U) \neq \emptyset \Rightarrow Sp(U) = \{0\}$

Dans $\mathbb{R}$: $\Rightarrow Sp(U) = \{0\}$

b) Soit $v \in \ker U \Leftrightarrow Uv = 0 \Leftrightarrow$
 $v \text{ nilp. et } v \text{ nilp.}$
 Tq. $\ker U \cap \ker U \neq \{0\}$.

ona $U \text{ nilp.} \Rightarrow \ker U \neq \{0\}$
 et ona $Uv = 0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow \ker U$ est stable par U .

Soit $\tilde{U} : \ker U \rightarrow \ker U$ l'endo. induit par U sur $\ker U$.

or U est nilp. $\Rightarrow \tilde{U}$ est nilp.
 D'après a) $\ker \tilde{U} \neq \{0\}$.

$\ker U \cap \ker U \neq \{0\}$.

si F est stable par U
 $U_F : F \rightarrow F$ l'endo induit

$$\ker U_F = F \cap \ker U$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{II.} \\ \underline{x \in F} \text{ tq } U_F(x) = 0 \end{array} \right\}$$

$$U(x)$$

1) $(K = \mathbb{C})$
 soit $v \in \ker U \Leftrightarrow Uv = 0 \Leftrightarrow$
 Tq U et v ont un $\overline{v}$ commun.

ona. $Sp(U) \neq \emptyset$ ($K = \mathbb{C}$)

Soit $d \in Sp(U) \Leftrightarrow \dim(U) \neq \{0\}$

Puisque $Uv = 0 \Leftrightarrow$
 $\Rightarrow E_d(U)$ est stable par U .

soit $\varphi_a: E_a(U) \rightarrow E_a(U)$ l'endomorphisme
par φ sur $E_a(U)$

$$|K = \mathbb{C}| \Rightarrow \text{Sp}(\varphi_a) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists p \in \text{Sp}(\varphi_a) \Rightarrow \exists x \in E_a(U) \setminus \{0\} \text{ tel que } \begin{cases} \varphi_a(x) = px \\ \varphi(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow x \vec{v}_p \in U$$

De plus $x \in E_a(U) \setminus \{0\} \Rightarrow \varphi(x) = dx$
 $\Rightarrow x \vec{v}_p \in U$

5) U est n.c.p. dimension n .

$$\Rightarrow \exists a \neq 0 \in K (a, \varphi(a), \dots, \varphi^{n-1}(a)) \text{ base de } U$$

b) $h: K_n \varphi_U \rightarrow K^n$
 $g \mapsto h(g) = g(a)$ linéaire

h est injective

Soit $g \in \ker h \Leftrightarrow g \in K_n \varphi_U$
 $h(g) = 0 \Leftrightarrow h(g) = 0 \Leftrightarrow g(a) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} U \circ g = g \circ U \\ \text{et} \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{0, \dots, n-1\}: U^k g = g U^k$$

$$\Rightarrow g(U^k(a)) = U^k(g(a)) = 0$$

Puisque $(a, U(a), \dots, U^{n-1}(a))$ base de U .
Alors $g = 0$.
 $\Rightarrow \ker \varphi_U = \{0\}$

Rq:

Si $U \circ U = U \circ U$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}; U^n \circ U = U \circ U^n$
 $\Downarrow$

$\ker U^n$ et $\text{Im } U^n$ est stable par U .

2) $\forall P \in K[X]; P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$
 $\Rightarrow P(U) \circ U = U \circ P(U)$

3) $\forall P, \forall \alpha \in K[X]$

$P(U) \circ \Phi(\alpha) = \Phi(\alpha) \circ P(U)$

c) On a $h: \ker \varphi_U \rightarrow E$ est injective
h est injective. $\Rightarrow \dim \ker \varphi_U \leq \dim E = n$.

Rq $B' = (Id_E, U, \dots, U^{n-1})$ est libre dans $\ker \varphi_U$

$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}; U^k \in \ker \varphi_U$

Soit $d_0, \dots, d_{n-1} \in K$ tq.

$\sum_{k=0}^{n-1} d_k U^k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} d_k U^k(\alpha) = 0$

$(\alpha, U(\alpha), \dots, U^{n-1}(\alpha))$ base $\Rightarrow$ libre.

$\Rightarrow d_0 = d_1 = \dots = d_{n-1} = 0$

$\Rightarrow B'$ est libre dans $\ker \varphi_U$

$\Rightarrow \text{card } B' \leq \dim \ker \varphi_U$

$\Rightarrow \dim \ker \varphi_U = n$

$\Rightarrow \text{card } B' = \dim \ker \varphi_U \Rightarrow B'$ base de $\ker \varphi_U$

Autrement

ona. h est injective.

• soit $y \in E \Rightarrow \exists d_0, \dots, d_{n-1} \in K$.

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} d_k U^k(a) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k h(U^k) \\ \leq h\left(\sum_{k=0}^{n-1} d_k U^k\right)$$

avec $f = \sum_{k=0}^{n-1} d_k U^k$

et $f \circ U = U \circ f \Rightarrow f \in \ker \varphi_U$

$\Rightarrow y = h(f) \Rightarrow$ h est surjective.

Ainsi h est bijective $\Rightarrow$ h isomorphisme

$\Rightarrow \dim \ker \varphi_U = \dim E = n$

• Puisque h est bijective

et $B = (a, U(a), \dots, U^{n-1}(a))$ base de E ,

Alors $h^{-1}(B) = (Id, U, \dots, U^{n-1})$ base de $\ker \varphi_U$

d) $v \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow$

$\exists d_0, \dots, d_{n-1} \in K$ tq $v = \sum_{k=0}^{n-1} d_k U^k$.

$\Leftrightarrow v = P(U)$ avec $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k x^k$

Partie II.

$$U \text{ est } \ker \varphi_U \Leftrightarrow U \circ U = U \circ U$$

$$\forall d \in \text{Sp}(U) : (U - d \text{Id}_E) \circ U = U \circ (U - d \text{Id}_E)$$

$$\Rightarrow E_d(U) = \ker(U - d \text{Id}_E) \text{ est stable par } U$$

2) i) U admet n vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $n = \dim E$
Alors U est diagonalisable.

$$\text{D'où } E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}$$

$$\text{ii) on a } U \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow U \circ U = U \circ U$$

$$\text{on a } E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(U)$$

$$\exists B = (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E \text{ avec } \\ E_{\lambda_i}(U) = \text{vect}(e_i).$$

$$\text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D'autre part on a $E_{\lambda_i}(U)$ est stable par U
 $\text{vect}(e_i)$

$$\Rightarrow U(e_i) \in \text{vect}(e_i) = E_{\lambda_i}(U)$$

$$\Rightarrow \exists p_i \in \mathbb{K} \text{ tq } U(e_i) = p_i e_i$$

$$\Rightarrow \text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$$

3) U est diagonalisable.
 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ pvp de U ($p \leq n$)
d'où $E_{\lambda_i} = n_i = \text{mult}(\lambda_i)$
et $\sum n_i = n$

a) $\forall v \in \ker U$

ona U est diagonalisable.

$$\Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U)$$

Soit $B' = (B_1, \dots, B_p)$ base de E .

adaptée à la décomposition

B_i base de $E_{d_i}(U)$

$$\text{Mat}(U, B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p I_{n_p} \end{pmatrix}$$

$U \circ U = U \circ U \Rightarrow \forall d_i, U_{p_i} \text{ de } U$

$E_{d_i}(U)$ est stable par U .

$$\Rightarrow \text{Mat}(U, B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

avec $A_i = \text{Mat}(U_i, B_i) \in M_{n_i}(K)$
et $U_i: E_{d_i}(U) \rightarrow E_{d_i}(U)$ l'endo induit

Théorème

U est diagonalisable $\Leftrightarrow$

$\exists P$ un polynôme annulateur de U
scindé et à racines simples.

Conséquences

Soit F est stable par U : $U_F: F \rightarrow F$ l'endo induit.

Si U est diagonalisable, alors U_F est diagonalisable.

Enflet

ona U est diagonalisable, alors $\exists$ P
polynôme scindé et à racines simples

$$\Leftrightarrow P(U) = 0 \Leftrightarrow P(U)(x) = 0_E, \forall x \in E$$

$$\Rightarrow P(U)(x) = 0, \forall x \in E.$$

$$\Rightarrow P(U_F) = 0.$$

$\Rightarrow U_F$ est diagonalisable.

(ii) ona U est diagonalisable

$$\Leftrightarrow E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(U)$$

$U|_U = U|_{U_0} \Rightarrow E_{\lambda_i}(U)$ stable par U .

soit $U_i: E_{\lambda_i}(U) \rightarrow E_{\lambda_i}(U)$ l'endomorphisme

ona U est diagonalisable $\Leftrightarrow U_i$ est diagonalisable

$\Rightarrow \exists B_i$ base de $E_{\lambda_i}(U)$ formée de $\vec{v}_p$ de U_i
 $\Downarrow$
 $\vec{v}_p$ de U .

$\Rightarrow \exists B'' = (B_1, \dots, B_p)$ base de E
formée des $\vec{v}_p$ de U .

$\Rightarrow \text{Mat}(U, B'') = \text{diagonal}$.

D'autre part:

B_i base de $E_{\lambda_i}(U) \Rightarrow B_i$ formée de $\vec{v}_p$ de U .

$\Rightarrow B''$ est formée de $\vec{v}_p$ de U .

$\text{Mat}(U, B'')$ est diagonal.

Application:

Soit $A, B \in M_n(K)$ tq. $AB = BA$
et A et B sont diagonalisables

$\Rightarrow \exists P \in GL_n(K)$ tq.

$$A = P D P^{-1}$$

$$B = P D' P^{-1}$$

$\Rightarrow A+B$ est diagonalisable.

$$A+B = P(D+D')P^{-1}$$

Prop. Si A est diagonalisable.
Alors $\forall \alpha, \beta \in K$, $\alpha A + \beta A$ est diagonalisable.
 $Sp(\alpha A + \beta A) = \{ \alpha + \beta \lambda \mid \lambda \in Sp(A) \}$

$$u) \quad U \in \mathcal{L}(E); \quad \gamma_U: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v \mapsto \gamma_U(v) = U \circ v$$

a) est un endo.

$$b) i) \quad \lambda \in Sp(U); \quad x \neq 0 \text{ tq } U(x) = \lambda x \\ E = H \oplus \text{vect}(x).$$

$$P: \text{proj sur } \text{vect}(x) \quad // \alpha \in H \Rightarrow P \neq 0$$

$$\text{tg } \gamma_U(P) = \lambda P:$$

$$\forall y \in E; \quad \gamma_U(P)(y) = U(P(y)) =$$

$$\text{or } P(y) \in \text{vect}(x) \Rightarrow \exists \alpha \in K \text{ tq } P(y) = \alpha x.$$

$$\Rightarrow \gamma_U(P)(y) = U(\alpha x) = \alpha U(x) = \alpha \lambda x \\ = \lambda (\alpha x) = \lambda P(y)$$

$$\Rightarrow \gamma_U(P) = \lambda P \Rightarrow \lambda \in Sp(\gamma_U)$$

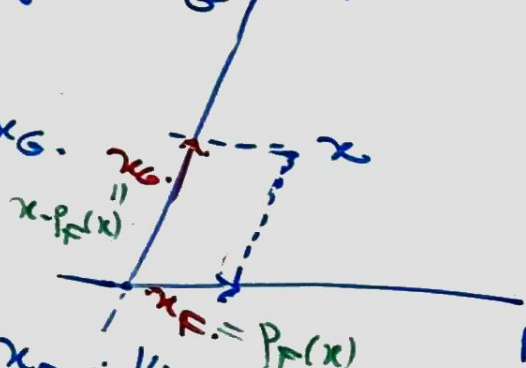
Rappel.

dim $E < \infty$

$$E = F \oplus G$$

soit P_F : projection sur F // à G .

$$\forall x \in E, \\ x = x_F + x_G.$$



$$P_F(x) = x_F, \forall x \in E.$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P_F \circ P_F(x) &= P_F(x) = x_F, \forall x \in E \\ \Rightarrow P_F \circ P_F &= P_F \Rightarrow P_F \text{ projecteur} \end{aligned}$$

$$\text{Im } P_F = F = \{x \in E \mid P_F(x) = x\}$$

$$\text{Im } P_F = \ker(P_F - \text{id}_E)$$

$$\ker P_F = G.$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{Im } P_F \oplus \ker P_F = E. (*)}$$

$$\rightarrow \forall x \in E; \quad x = \underbrace{P_F(x)}_{\in \text{Im } P_F} + \underbrace{x - P_F(x)}_{\in \ker P_F}$$

soit P_G : projection sur G // à F .

$$\Rightarrow P_G + P_F = \text{id}_E.$$

$$P_G \circ P_F = \vec{0} = P_F \circ P_G.$$