

# A-Réduction géométrique

$\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## 5.1 Sous-espaces stables

### 5.1.1 Définition

#### Définition

Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est dit stable par  $u \in \mathcal{L}(E)$  si  $u(F) \subset F$  i.e.

$$\forall x \in F, u(x) \in F$$

**Exemple**  $\{0_E\}$  et  $E$  sont stables par  $u$ .

$F$  est stable par  $\tilde{0}$ , par  $\text{Id}_E$  et, plus généralement, par  $\lambda \text{Id}_E$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Exemple**  $E = \mathbb{K}[X]$ ,  $D : P \mapsto P'$ ,  $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$

$\mathbb{K}_n[X]$  est stable par  $D$ .

En effet,

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \deg P' \leq \deg P$$

**Exemple**  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $T : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ ,  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ .

Le sous-espace vectoriel  $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  des suites réelles bornées est stable par  $T$ .

#### Proposition

Si  $F$  et  $G$  sont stables par  $u$  alors  $F + G$  et  $F \cap G$  aussi.

dém. :

$$u(F + G) = u(F) + u(G) \subset F + G.$$

$$u(F \cap G) \subset u(F) \cap u(G) \subset F \cap G.$$

□

#### Théorème

Si  $u$  et  $v$  commutent alors  $\text{Im } u$  et  $\ker u$  sont stables par  $v$ .

dém. :

Pour tout  $x \in \ker u$ ,  $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0_E) = 0_E$  donc  $v(x) \in \ker u$ .

Pour tout  $y \in \operatorname{Im} u$ , on peut écrire  $y = u(x)$  et alors  $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \operatorname{Im} u$ .

□

**Exemple**  $\operatorname{Im} u$  et  $\ker u$  sont stables par  $u$ .

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$  et  $\ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$  sont stables par  $u$ .

### 5.1.2 Endomorphisme induit

#### Définition

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on peut considérer l'application restreinte  $u_F : F \rightarrow F$  qui définit un endomorphisme de  $F$ . On l'appelle endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ .

**Exemple**  $\ker u$  est stable par  $u$ , on peut introduire  $u_{\ker u}$  et l'on a  $u_{\ker u} = \tilde{0}$ .

**Exemple**  $\operatorname{Im} u$  est stable par  $u$  et on peut introduire  $u_{\operatorname{Im} u}$ .

Cependant  $u_{\operatorname{Im} u}$  peut ne pas être surjectif.

En fait,  $u_{\operatorname{Im} u}$  est surjectif si, et seulement si,  $\operatorname{Im} u^2 = \operatorname{Im} u$  car  $\operatorname{Im} u_{\operatorname{Im} u} = \operatorname{Im} u^2$ .

**Exemple** Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $D : f \mapsto f'$ .

$F = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)$  est stable par  $D$  car  $D(\cos), D(\sin) \in F$  et

$$\operatorname{Mat}_{(\cos, \sin)}(D_F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = R_{-\pi/2}$$

#### Théorème

Si  $F$  est stable par  $u$  et  $v \in \mathcal{L}(E)$  alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $F$  est stable par  $\lambda u$ ,  $u + v$  et  $u \circ v$ .

De plus

$$(\lambda u)_F = \lambda u_F, (u + v)_F = u_F + v_F \text{ et } (u \circ v)_F = u_F \circ v_F$$

dém. :

$$(\lambda u)(F) = \lambda u(F) \subset \lambda F \subset F.$$

$$(u + v)(F) \subset u(F) + v(F) \subset F + F \subset F.$$

$$(u \circ v)(F) = u(v(F)) \subset u(F) \subset F.$$

Pour tout  $x \in F$

$$(\lambda u)_F(x) = (\lambda u)(x) = \lambda u(x) = \lambda u_F(x) = (\lambda u_F)(x).$$

$$(u + v)_F(x) = (u + v)(x) = u(x) + v(x) = u_F(x) + v_F(x) = (u_F + v_F)(x).$$

$$(u \circ v)_F(x) = (u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(v_F(x)) = u_F(v_F(x)) = (u_F \circ v_F)(x).$$

□

**Proposition**

Si  $F$  est stable par  $u$  alors

$$\ker u_F = \ker u \cap F \text{ et } \operatorname{Im} u_F \subset \operatorname{Im} u \cap F$$

dém. :

Soit  $x \in \ker u_F$ . On a  $x \in F$  et  $u(x) = u_F(x) = 0$  donc  $x \in \ker u \cap F$ .

Soit  $x \in \ker u \cap F$ . On a  $u_F(x) = u(x) = 0$  donc  $x \in \ker u_F$ .

$\operatorname{Im} u_F \subset \operatorname{Im} u$  car  $u_F$  est restriction de  $u$  et  $\operatorname{Im} u_F \subset F$  car  $F$  est stable par  $u$ .

□

**Remarque** Si  $u$  est injectif alors  $u_F$  est injectif.

**Remarque** Si  $u$  est surjectif, on ne peut rien dire a priori sur  $u_F$ .

Par exemple, la dérivation sur  $\mathbb{K}[X]$  est surjective, mais l'endomorphisme induit sur  $\mathbb{K}_n[X]$  ne l'est pas.

### 5.1.3 Visualisation en dimension finie

Ici  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

**Théorème**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension  $p$  muni d'une base  $f = (e_1, \dots, e_p)$  complétée en une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ . Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a équivalence entre :

(i)  $F$  est stable par  $u$  ;

(ii) la matrice de  $u$  dans  $e$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$$

De plus, si tel est le cas,  $A$  est alors de la matrice de  $u_F$  dans la base  $f$ .

dém. :

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons  $F$  stable par  $u$ . On peut introduire  $A = \operatorname{Mat}_f(u_F) = (a_{i,j})$  et on a

$$\forall 1 \leq j \leq p, u(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{i,j} e_i$$

et alors la matrice de  $u$  dans  $e$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} \\ (0) & & (*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Supposons la matrice de  $u$  dans  $e$  de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

avec  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . Pour tout  $1 \leq j \leq p$ ,  $u(e_j) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$  donc  $u(e_j) \in F$  puis, par linéarité, pour tout  $x \in F$ ,  $u(x) \in F$ .

□

**Théorème**

On suppose  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$  et on note  $e$  une base de  $E$  adaptée à cette décomposition.

Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a équivalence entre :

(i) chaque  $F_k$  est stable par  $u$  ;

(ii) la matrice de  $u$  dans la base  $e$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_m \end{pmatrix}$$

avec  $A_k \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K})$  où  $\alpha_k = \dim F_k$ .

**Remarque** La réduction d'un endomorphisme  $u$  de  $E$  consiste à écrire

$$E = \bigoplus_{k=1}^m F_k$$

avec  $F_k$  stable par  $u$  et  $u|_{F_k}$  « simple ».

En dimension finie, la réduction d'un endomorphisme correspond à l'obtention d'une représentation matricielle simple (la plus diagonale possible).

## 5.2 Eléments propres

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à  $\{0_E\}$  de dimension quelconque et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

### 5.2.1 Valeur propre et vecteur propre

**Proposition**

Soit  $x \in E \setminus \{0_E\}$  et  $D = \text{Vect}(x)$  la droite vectorielle engendrée par  $x$ .

On a équivalence entre :

(i)  $D$  est stable par  $u \in \mathcal{L}(E)$  ;

(ii) il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

dém. :

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Si  $D$  est stable par  $u$  alors  $u(x) \in D$  et donc il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Si  $u(x) = \lambda x$  alors  $u(D) = u(\text{Vect}x) = \text{Vect}u(x) \subset \text{Vect}x$ .

□

**Définition**

On dit que  $x \in E$  est vecteur propre de  $u$  si

$$x \neq 0_E \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x$$

**Attention :** Par définition un vecteur propre est un vecteur non nul.

**Remarque** Il y a alors unicité de la valeur  $\lambda$  car

$$\lambda x = \mu x \text{ avec } x \neq 0_E \Rightarrow \lambda = \mu$$

On dit alors  $\lambda$  est la valeur propre associée au vecteur propre  $x$ .

### Définition

On appelle valeur propre de  $u$  tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  vérifiant

$$\exists x \neq 0_E, u(x) = \lambda x$$

On appelle spectre de  $u$  l'ensemble des valeurs propres de  $u$ , on le note  $\text{Sp}u$ .

**Exemple** On a

$$0 \in \text{Sp}u \Leftrightarrow \exists x \neq 0_E, u(x) = 0_E$$

Ainsi

$$0 \in \text{Sp}u \Leftrightarrow u \text{ non injectif}$$

## 5.2.2 Sous-espace propre

### Définition

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on note

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$$

le sous-espace vectoriel formé des vecteurs  $x \in E$  solutions de l'équation

$$u(x) = \lambda x$$

**Exemple**  $E_0(u) = \ker u$ .

$E_1(u) = \{x \in E / u(x) = x\}$ . C'est l'espace des vecteurs invariants par  $u$ .

### Théorème

On a équivalence entre :

- (i)  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  ;
- (ii)  $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$  ;
- (iii) l'endomorphisme  $u - \lambda \text{Id}$  n'est pas injectif.

### Définition

Si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  alors  $E_\lambda(u)$  est appelé sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Remarque** Si  $\lambda \notin \text{Sp}(u)$  alors  $E_\lambda(u) = \{0_E\}$ .

Si  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  alors  $E_\lambda(u) = \{0_E\} \cup \{\text{vecteur propre associé à la valeur propre } \lambda\}$ .

## 5.2.3 Stabilité des sous-espaces propres

## Théorème

Les sous-espaces propres de  $u \in \mathcal{L}(E)$  sont stables par  $u$  et

$$\forall \lambda \in \text{Sp}u, u_{E_\lambda(u)} = \lambda \text{Id}$$

dém. :

$u$  et  $u - \lambda \text{Id}_E$  commutent donc  $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$  est stable par  $u$ .

De plus, pour tout  $x \in E_\lambda(u)$ ,  $u(x) = \lambda x$  donc

$$u_{E_\lambda(u)} = \lambda \text{Id}$$

□

## Corollaire

Si  $u$  et  $v$  commutent alors les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .

dém. :

En effet,  $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id})$  et  $u - \lambda \text{Id}$  commute avec  $v$ .

□

## 5.2.4 Les sous-espaces propres sont en somme directe

## Théorème

Des sous-espaces propres de  $u \in \mathcal{L}(E)$  associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.

dém. :

Par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}^*$ , montrons que la somme de  $m$  sous-espaces propres de  $u$  est directe.

Cas  $m = 1$  : il n'y a rien à démontrer.

Supposons la propriété établie au rang  $m \geq 1$ .

Soit  $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_m}(u), E_{\lambda_{m+1}}(u)$  des sous-espaces propres de  $u$  associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.

Supposons  $x_1 + \dots + x_m + x_{m+1} = 0_E$  avec  $x_k \in E_{\lambda_k}(u)$ .

En appliquant  $u$ , on obtient  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m + \lambda_{m+1} x_{m+1} = 0_E$ .

Par combinaison de ces deux équations, on obtient  $(\lambda_1 - \lambda_{m+1})x_1 + \dots + (\lambda_m - \lambda_{m+1})x_m = 0_E$ .

Cette équation est de la forme  $y_1 + \dots + y_m = 0_E$  avec  $y_k = (\lambda_k - \lambda_{m+1})x_k \in E_{\lambda_k}(u)$ .

Par hypothèse de récurrence, les espaces  $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_m}(u)$  sont en somme directe donc

$$\forall 1 \leq k \leq m, y_k = 0_E$$

ce qui fournit

$$\forall 1 \leq k \leq m, x_k = 0_E$$

car

$$\lambda_k - \lambda_{m+1} \neq 0$$

Enfin, en reprenant l'équation initiale, on a aussi  $x_{m+1} = 0_E$ .

Récurrence établie.

□

**Corollaire**

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

dém. :

Cas d'une famille finie :

Soit  $x_1, \dots, x_m$  des vecteurs propres associés à des valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  deux à deux distinctes.

Supposons  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0_E$ .

Puisque  $\alpha_k x_k \in E_{\lambda_k}(u)$  et puisque les sous-espaces vectoriels  $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_m}(u)$  sont en somme directe, on a

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, \alpha_k x_k = 0_E$$

Or  $x_k \neq 0_E$  (car c'est un vecteur propre) donc  $\alpha_k = 0$ .

Cas d'une famille infinie :

Celle-ci est libre car ses sous-familles finies le sont par l'argumentaire précédent.

□

**Corollaire**

En dimension finie égale à  $n$ , un endomorphisme ne peut admettre plus de  $n$  valeurs propres.

dém. :

Si  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont des valeurs propres de  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\dim E = n$  alors

$$\bigoplus_{k=1}^m E_{\lambda_k}(u) \subset E \text{ avec } \dim E_{\lambda_k}(u) \geq 1$$

donne  $m \leq \dim E$ .

□

**Remarque** En dimension infinie, il peut y avoir une infinité de valeurs propres.

## 5.2.5 Détermination pratique

**Protocole :**

Pour déterminer les valeurs propres de  $u$ , on étudie pour quels scalaires  $\lambda \in \mathbb{K}$ , l'équation

$$u(x) = \lambda x$$

possède d'autres solutions que la solution nulle.

Cette équation est appelée l'équation aux éléments propres associée à  $u$ .

**Exemple** Soit  $E = \mathbb{K}[X]$  et  $\varphi \in \mathcal{L}(E)$  défini par  $\varphi(P) = XP'(X)$ . Déterminons  $\text{Sp}\varphi$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

$$\varphi(P) = \lambda P \Leftrightarrow XP'(X) = \lambda P(X)$$

Analyse :

Si cette équation possède une solution  $P \neq 0$  alors en posant  $n = \deg P$ , on peut écrire

$P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$  avec  $a_n \neq 0$ . L'équation  $XP'(X) = \lambda P(X)$  donne

$$\forall 0 \leq k \leq n, \lambda a_k = n a_k$$

Sachant  $a_n \neq 0$ , on obtient  $\lambda = n$  et  $a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$ .

Ainsi

$$\lambda \in \mathbb{N} \text{ et } P = a_n X^n$$

Synthèse :

Pour  $\lambda \in \mathbb{N}$  et  $P = a_\lambda X^\lambda$  avec  $a_\lambda \neq 0$ , on vérifie  $XP'(X) = \lambda P(X)$  avec  $P \neq 0$  donc  $\lambda \in \text{Sp}\varphi$ .

Finalement  $\text{Sp}\varphi = \mathbb{N}$  et

$$\forall \lambda \in \mathbb{N}, E_\lambda(\varphi) = \text{Vect}(X^\lambda)$$

**Exemple** Soit  $E = \mathbb{K}[X]$  et  $\psi \in \mathcal{L}(E)$  défini par  $\psi(P) = XP(X)$ . Déterminons  $\text{Sp}\psi$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

$$\psi(P) = \lambda P(X) \Leftrightarrow XP(X) = \lambda P(X) \Leftrightarrow (X - \lambda)P(X) = 0 \Leftrightarrow P(X) = 0$$

donc  $\text{Sp}\psi = \emptyset$ .

**Exemple** Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  et  $D : f \mapsto f'$ . Déterminons  $\text{Sp}D$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $f \in E$ .

$$D(f) = \lambda f \Leftrightarrow f' = \lambda f \Leftrightarrow f \in \text{Vect}(e_\lambda)$$

avec  $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$  fonction non nulle.

On en déduit  $\text{Sp}D = \mathbb{C}$  et

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, E_\lambda(D) = \text{Vect}(e_\lambda)$$

**Exemple** Soit  $E = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  et  $T : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Déterminons  $\text{Sp}T$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u = (u_n) \in E$ .

$$T(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n u_0$$

Si  $|\lambda| > 1$  alors la suite  $(\lambda^n u_0)$  est bornée si, et seulement si,  $u_0 = 0$  et c'est alors la suite nulle.

Si  $|\lambda| \leq 1$  alors la suite  $(\lambda^n u_0)$  est bornée et non nulle pour tout  $u_0 \neq 0$ .

Finalement  $\text{Sp}T = [-1, 1]$  et

$$\forall \lambda \in [-1, 1], E_\lambda(T) = \text{Vect}((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}})$$

## 5.3 Eléments propres en dimension finie

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ .

### 5.3.1 Eléments propres d'une matrice carrée

#### Définition

On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  s'il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  vérifiant

$$AX = \lambda X \text{ et } X \neq 0$$

On dit alors que la colonne  $X$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

On appelle spectre de la matrice  $A$  l'ensemble  $\text{Sp}A$  formé des valeurs propres de  $A$ .

#### Définition

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note  $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$  l'espace des solutions de l'équation  $AX = \lambda X$ .

Lorsque  $\lambda$  est valeur propre de  $A$ ,  $E_\lambda(A)$  est appelé sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Remarque** En identifiant tuple et colonne, les éléments propres de  $A$  correspondent aux éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  défini par

$$x \in \mathbb{K}^n \mapsto y = Ax \in \mathbb{K}^n$$

**Remarque** Pour déterminer, les valeurs propres de  $A$ , on étudie l'équation aux éléments propres  $AX = \lambda X$ .

**Théorème**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $e$  une base de  $E$ .  
Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $x \in E$ , en notant  $A = \text{Mat}_e(u)$  et  $X = \text{Mat}_e(x)$ , on a

$$\text{Sp}A = \text{Sp}u \text{ et } \forall \lambda \in \text{Sp}u, x \in E_\lambda(u) \Leftrightarrow X \in E_\lambda(A)$$

dém. :  
On a

$$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow AX = \lambda X \text{ et } x \neq 0_E \Leftrightarrow X \neq 0$$

□

**Corollaire**

Deux matrices semblables ont le même spectre.

dém. :

Car elles représentent le même endomorphisme.

□

### 5.3.2 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , l'expression

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

est un polynôme en  $\lambda$ .

**Définition**

On appelle polynôme caractéristique de  $A$ , le polynôme  $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$  déterminé par la propriété

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

**Exemple** Polynôme caractéristique de  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc$$

et donc

$$\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$$

**Exemple** Polynôme caractéristique de

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Comme déterminant diagonal, on obtient

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

**Théorème**

Le polynôme caractéristique de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est unitaire, de degré  $n$  et possède les coefficients remarquables suivants

$$\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

dém. :

Par la formule des déterminants

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i})$$

Pour tout  $\sigma \in S_n$ , posons

$$P_\sigma(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{\sigma(i),i} - a_{\sigma(i),i})$$

$P_\sigma$  est une fonction polynôme de degré  $\leq n$ .

Si  $\sigma \neq \operatorname{Id}_{S_n}$ , il existe au moins deux indices  $i, j$  tels que  $\sigma(i) \neq i$  et  $\sigma(j) \neq j$ , la fonction polynôme  $P_\sigma$  est alors de degré  $\leq n-2$ .

Si  $\sigma = \operatorname{Id}_{S_n}$

$$P_{\operatorname{Id}}(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{i,i}) = \lambda^n - (a_{1,1} + \dots + a_{n,n})\lambda^{n-1} + \dots$$

Ainsi

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \dots$$

Enfin, le coefficient constant de  $\chi_A$  est  $\chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$ .

□

**Exemple** Soit  $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$  et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & (0) & a_0 \\ 1 & 0 & \vdots \\ & \ddots & a_{n-2} \\ (0) & -1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calculons le polynôme caractéristique de  $A$ .

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & & (0) & -a_0 \\ -1 & \lambda & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & -a_{n-2} \\ (0) & & -1 & \lambda - a_{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant selon la dernière colonne

$$\chi_A(\lambda) = P(\lambda)$$

### 5.3.3 Polynôme caractéristique et valeurs propres

**Théorème**

Les valeurs propres de  $A$  sont exactement les racines de  $\chi_A$ .

dém. :

$$\lambda \in \text{Sp}A \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ non inversible} \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Or

$$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \det(\lambda I_n - A) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$$

donc

$$\lambda \in \text{Sp}A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$$

□

**Exemple Si**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\text{Sp}A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

**Corollaire**

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  possède au plus  $n$  valeurs propres.

dém. :

Car un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines.

□

**Corollaire**

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  possède au moins une valeur propre complexe.

dém. :

$\chi_A \in \mathbb{C}[X]$  est un polynôme non constant, il possède donc au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

□

### 5.3. ELÉMENTS PROPRES EN DIMENSION FINIE

**Remarque** Aussi  $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$  possède au moins une valeur propre réelle.

**Exemple** Etude des éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^3 \det(A - \lambda I_3) = - \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ -1-\lambda & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(\lambda I_3 - A) = -(\lambda + 1)^2 \begin{vmatrix} -2+\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)$$

Ainsi

$$\chi_A(X) = (X + 1)^2 (X + 2)$$

Ainsi  $\text{Sp}(A) = \{-1, -2\}$

Étudions  $E_{-2}(A)$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) \Leftrightarrow AX = -2X \Leftrightarrow (A + 2I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

donc  $E_{-2}(A) = \text{Vect}(1, -1, -1)$

Étudions  $E_{-1}(A)$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow (A + I_3)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

donc  $E_{-1} = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

**Exemple** Etude des éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ (1) & & & \end{pmatrix}$$

Via  $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & (-1) & \dots & (-1) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \lambda \\ (-1) & & & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - (n-1) & (-1) & \dots & (-1) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \lambda \\ \lambda - (n-1) & (-1) & & \lambda \end{vmatrix}$$

puis via  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - (n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \lambda + 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (0) & & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

Ainsi  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - (n-1))(\lambda + 1)^{n-1}$  et donc

$$\chi_A(X) = (X - (n-1))(X + 1)^{n-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow (A + I_n)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = 0 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + \cdots + x_n = 0$$

Ainsi  $E_{-1}(A)$  est l'hyperplan d'équation  $x_1 + \cdots + x_n = 0$ .

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_{n-1}(A) \Leftrightarrow (A + I_n)X = nX$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = nx_1 \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_n = nx_n \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n$$

Ainsi  $E_{n-1}(A) = \text{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$ .

### 5.3.4 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

#### Proposition

Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables alors  $\chi_A = \chi_B$ .

dém. :

Si  $B = P^{-1}AP$  avec  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  alors  $\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I_n - A)P) = \det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda)$ .

□

#### Définition

On appelle polynôme caractéristique de  $u \in \mathcal{L}(E)$ , le polynôme caractéristique commun aux matrices représentant l'endomorphisme  $u$ ; on le note  $\chi_u$ .

**Exemple**  $\chi_{\text{Id}_E} = \chi_{\lambda I_n} = (X - \lambda)^n$  avec  $n = \dim E$ .

**Exemple** Supposons  $E = F \oplus G$ . Déterminons le polynôme caractéristique de la projection sur  $F$  parallèlement à  $G$ .

Dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ , la matrice de  $p$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

avec  $r = \dim F$ . On a alors

$$\chi_p(X) = (X-1)^r X^{n-r}$$

### Théorème

Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\chi_u$  est un polynôme unitaire de degré exactement  $n = \dim E$  de la forme

$$\chi_u(\lambda) = \lambda^n - \operatorname{tr}(u)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$$

De plus, les valeurs propres de  $u$  sont exactement les racines de  $\chi_u$ .

dém. :

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est la matrice de  $u$  dans une base de  $E$ ,  $\chi_u = \chi_A$  avec  $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} u$  et  $\det A = \det u$ .

De plus,  $\operatorname{Sp}(u) = \operatorname{Sp}(A)$  et donc les racines de  $\chi_u$  correspondent aux valeurs propres de  $u$ .

□

### Corollaire

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède au plus  $\dim E$  valeurs propres.

### Corollaire

Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie alors tout  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède au moins une valeur propre.

**Remarque** Si  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension impaire alors tout  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède au moins une valeur propre.

### 5.3.5 Multiplicité d'une valeur propre

**Rappel :**

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  est un polynôme non nul, on appelle ordre de multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $P$  le plus grand  $\alpha \in \mathbb{N}$  tel que

$$(X - \lambda)^\alpha \mid P$$

Ceci équivaut encore à

$$P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(\alpha-1)}(\lambda) = 0 \text{ et } P^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0$$

**Rappel :**

Un polynôme  $P$  non constant est dit scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  si, et seulement si, on peut le factoriser sous la forme

$$P = \mu \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

Les scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  correspondent alors à ses racines comptées avec multiplicité.

En regroupant les racines égales, on obtient l'écriture

$$P = \mu \prod_{k=1}^m (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts et  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  leurs multiplicités respectives.

**Définition**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On appelle multiplicité de  $\lambda$  en tant que valeur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$ , l'ordre de multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_u$  ; on la note  $m_\lambda(u)$  (idem en  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  pour  $m_\lambda(A)$ ).

**Remarque** Abusivement,  $\lambda$  valeur propre de multiplicité 0 signifie que  $\lambda$  n'est pas valeur propre.

**Exemple** Valeurs de propres de

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & * \\ & \lambda & \\ 0 & & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \neq \mu$$

On a  $\chi_A = (X - \lambda)^2(X - \mu)$

$\lambda$  est valeur propre double et  $\mu$  est valeur propre simple de  $A$ .

**Exemple** Valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a  $\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ .

Les valeurs propres de  $A$  sont les  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  comptées avec multiplicité.

**Théorème**

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \sum_{\lambda \in \text{Sp} u} m_\lambda(u) \leq \dim E$$

avec égalité si, et seulement si, le polynôme  $\chi_u$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  (idem pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ).

dém. :

La somme des multiplicités des racines d'un polynôme non nul est inférieure à son degré avec égalité si, et seulement si, ce polynôme est scindé.

□

**Corollaire**

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  alors  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède exactement  $n$  valeurs propres comptées avec multiplicité (idem en  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ).

dém. :

Dans  $\mathbb{C}[X]$ , tout polynôme non constant est scindé.

□

### 5.3.6 Multiplicité et dimension des sous-espaces propres

**Théorème**

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable par  $u$  alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  divise le polynôme caractéristique de  $u$ .

dém. :

Dans une base adaptée à  $F$ , la matrice de  $u$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec  $A$  matrice de  $u_F$ . On a alors  $\chi_u = \chi_A \chi_C$  avec  $\chi_A = \chi_{u_F}$ .

□

**Théorème**

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$$

(idem avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ).

dém. :

Soit  $\lambda \in \text{Sp}_u$ .

D'une part,  $F = E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{Id}) \neq \{0_E\}$  donc  $\dim F \geq 1$ .

D'autre part,  $F$  est stable par  $u$  donc  $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ .

Or  $\chi_{u_F} = (X - \lambda)^{\dim F}$  car  $u_F = \text{Id}_F$  donc  $\lambda$  est racine de multiplicité au moins  $\dim F$  de  $\chi_u$ .

□

**Corollaire**

Si  $\lambda$  est une valeur propre simple alors le sous-espace propre associé est de dimension 1.

### 5.3.7 Changement de corps

Supposons  $\mathbb{L}$  un sous-corps de  $\mathbb{K}$ .

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{L})$ , on peut aussi comprendre  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On peut donc parler de valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{L}$ , mais aussi dans  $\mathbb{K}$ . Bien évidemment

$$\text{Sp}_{\mathbb{L}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$$

En particulier, on peut parler des valeurs propres complexes d'une matrice réelle.

**Exemple** Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

On a  $\chi_A = X^2 + 1$  donc  $\text{Sp}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}} = \{i, -i\}$ .

**Théorème**

Les valeurs propres complexes d'une matrice réelle sont deux à deux conjuguées.

De plus, deux racines complexes conjuguées ont même multiplicité et les sous-espaces propres associés se correspondent par conjugaison.

dém. :

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est réel. Ses racines complexes sont donc deux à deux conjuguées et deux racines conjuguées ont même multiplicité. Aussi

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

L'application  $X \mapsto \bar{X}$  définit alors une bijection de  $E_\lambda(A)$  vers  $E_{\bar{\lambda}}(A)$ .

□

**Remarque** Par conjugaison, une base de  $E_\lambda(A)$  est transformée en une base de  $E_{\bar{\lambda}}(A)$  : ces deux sous-espaces propres sont d'égales dimensions.

## 5.4 Diagonalisabilité

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$

### 5.4.1 Endomorphisme diagonalisable

#### Définition

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit diagonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle sa matrice est diagonale. Une telle base est appelée base de diagonalisation de  $u$ .

**Exemple**  $\text{Id}_E$  est diagonalisable et n'importe quelle base de  $E$  est base de diagonalisation.

**Exemple** Les projections vectorielles sont diagonalisables.

En effet, si  $E = F \oplus G$  alors la projection  $p$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  a pour matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{pmatrix} \text{ avec } r = \dim F$$

dans une base adaptée à la décomposition  $E = F \oplus G$ .

Aussi, les symétries vectorielles sont diagonalisables.

#### Théorème

Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a équivalence entre :

- (i)  $u$  est diagonalisable ;
- (ii) il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

Une base de diagonalisation est aussi appelée une base propre.

dém. :

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons  $u$  diagonalisable et considérons  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de diagonalisation de  $u$ .

La matrice de  $u$  dans  $e$  est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $u(e_i) = \lambda_i e_i$  avec  $e_i \neq 0_E$  donc  $e_i$  vecteur propre de  $u$ .

La famille  $e$  est donc une base de vecteurs propres de  $u$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Supposons l'existence d'une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs propres de  $u$ .

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $u(e_i) = \lambda_i e_i$  avec  $\lambda_i$  la valeur propre associée au vecteur propre  $e_i$ .

La matrice de  $u$  dans la base  $e$  est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

**Exemple** Un endomorphisme diagonalisable possède au moins une valeur propre.

**Exemple** Si  $u$  est diagonalisable et si  $u$  ne possède qu'une valeur propre  $\lambda$  alors  $u = \lambda \text{Id}_E$ .

En effet, la matrice de  $u$  dans une base propre est  $\lambda I_n$  et donc  $u = \lambda \text{Id}_E$ .

## 5.4.2 Une condition suffisante de diagonalisabilité

### Théorème

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède  $n = \dim E$  valeurs propres distinctes alors  $u$  est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous des droites vectorielles.

dém. :

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $u$ .

Soit  $e_1, \dots, e_n$  des vecteurs propres associés.

La famille  $e = (e_1, \dots, e_n)$  est libre car formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Etant formée de  $n = \dim E$  vecteurs de  $E$ , c'est une base de  $E$  diagonalisant  $u$ .

On a alors

$$\text{Mat}_e u = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$$

et donc

$$\chi_u = \chi_D = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

Puisque les  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont deux à deux distincts, les valeurs propres de  $u$  sont toutes simples et les sous-espaces propres sont donc de dimension 1.

□

**Exemple** Considérons l'application  $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$  définie par  $\varphi(P) = nXP - (X^2 - 1)P'$ .

Étudions la diagonalisabilité de  $\varphi$ .

L'application  $\varphi$  est bien définie car si  $P = aX^n + \dots$ ,  $nXP = aX^{n+1} + \dots$ ,

$n(X^2 - 1)P' = naX^{n+1} + \dots$  et donc  $\varphi(P) = 0.X^{n+1} + \dots \in \mathbb{K}_n[X]$ .

Puisque  $\varphi(X^k) = (n - k)X^{k+1} + kX^{k-1}$ , la matrice de  $\varphi$  dans  $(1, X, \dots, X^n)$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ n & & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du polynôme caractéristique n'est alors pas simple.

Considérons alors la base de Taylor  $B = (1, (X-1), \dots, (X-1)^n)$ .

Puisque  $\varphi((X-1)^k) = (n-k)(X-1)^{k+1} + (n-2k)(X-1)^k$ , la matrice de  $\varphi$  dans  $B$  est

$$\begin{pmatrix} n & & & (0) \\ n & n-2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & -n \end{pmatrix}$$

On en déduit  $\chi_\varphi = \prod_{k=0}^n (n-2k-X) = (-1)^n \prod_{k=0}^n (X-(n-2k))$  et  $\text{Sp}\varphi = \{n-2k/k \in [0, n]\}$ .

Puisque  $\text{CardSp}\varphi = n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ , l'endomorphisme  $\varphi$  est diagonalisable et sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

### 5.4.3 Diagonalisabilité et sous-espaces propres

#### Théorème

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre :

- (i)  $u$  est diagonalisable ;
- (ii)  $E$  est la somme directe des sous-espaces propres de  $u$  i.e. :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

- (iii)  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$ .

dém. :

Rappelons que l'on sait déjà que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons  $u$  diagonalisable.

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base propre de  $u$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $e_i$  est vecteur propre de  $u$  donc

$$e_i \in \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

puis  $E \subset \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$  et enfin  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Car l'on sait  $\dim \bigoplus_{i=1}^m F_i = \sum_{i=1}^m \dim F_i$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Une famille formée par concaténation de bases des espaces propres  $E_\lambda(u)$  est une famille libre formée de  $\dim E$  vecteurs, c'est donc une base de vecteurs propres.

□

#### Corollaire

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre :

- (i)  $u$  est diagonalisable ;
- (ii)  $\chi_u$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  et, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$ .

dém. :

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons  $u$  diagonalisable.

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  les valeurs propres de  $u$ .

Dans une base adaptée à l'écriture  $E = \bigoplus_{j=1}^m E_{\lambda_j}(u)$  la matrice de  $u$  est

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m I_{\alpha_m} \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$ . On a alors

$$\chi_u = \prod_{k=1}^m (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

$\chi_u$  est scindé et pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\lambda_k$  est racine de  $\chi_u$  de multiplicité  $n_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Supposons (ii)

Puisque  $\chi_u$  est scindé, la somme des multiplicités de ses racines égale son degré.

Ainsi  $\deg \chi_u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda(u)$  et donc  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$  ce qui entraîne la diagonalisabilité

de  $u$ .

□

## 5.4.4 Matrice diagonalisable

### Définition

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale i.e. il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $D \in D_n(\mathbb{K})$  vérifiant

$$P^{-1}AP = D \text{ ou, et c'est équivalent, } A = PDP^{-1}$$

### Théorème

Soit  $A$  la matrice d'un endomorphisme  $u$  dans une base  $e$  de  $E$ . On a équivalence entre :

- (i)  $A$  est diagonalisable ;
- (ii)  $u$  est diagonalisable.

dém. :

Les matrices semblables à  $A$  correspondent à celles pouvant représenter l'endomorphisme  $u$ .

□

**Exemple** En particulier,  $A$  est diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$  l'est.

### Théorème

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On a équivalence entre :

- (i)  $A$  est diagonalisable ;
- (ii)  $\bigoplus_{i=1}^m E_{\lambda_i}(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  (ou  $\mathbb{K}^n$ ) ;
- (iii)  $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A)$  ;

(iv)  $\chi_A$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  et pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ ,  $\dim E_\lambda(A) = m_\lambda(A)$ .

De plus, les matrices diagonales semblables à  $A$  sont celles dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité.

dém. :

On transpose par l'endomorphisme canoniquement associé.

□

### Théorème

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  admet  $n$  valeurs propres distinctes alors  $A$  est diagonalisable et, de plus, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

**Exemple** Une matrice triangulaire à coefficients diagonaux distincts est assurément diagonalisable.

**Exemple** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

a) Diagonalisabilité si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

b) Diagonalisabilité si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

$\chi_A = X^2 - 2X + 2$ .

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $A$  n'est pas diagonalisable car  $\chi_A$  n'est pas scindé.

Dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ,  $A$  est diagonalisable car admet deux valeurs propres  $1+i$  et  $1-i$ .

La matrice  $A$  est alors semblable à

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

**Exemple** Diagonalisabilité de  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

$\chi_A(X) = (1-X)^2$ ,  $\text{Sp}A = \{1\}$ .

Si  $A$  est diagonalisable alors  $A$  est semblable à  $I_2$  donc égale à  $I_2$ .

Ainsi  $A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $a = 0$ .

**Exemple** Diagonalisabilité de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

$\chi_A = (X-1)^2(X-2)$ ,  $\text{Sp}A = \{1, 2\}$ .

$\dim E_1(A) = 3 - \text{rg}(A - I_3)$ , or  $\text{rg}(A - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$  donc

$\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1(A)$ .

La matrice  $A$  n'est donc pas diagonalisable.

**Exemple** Diagonalisabilité de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ (avec } n \geq 2)$$

$\chi_A = (X-n)X^{n-1}$ ,  $\text{Sp}(A) = \{0, n\}$ .

$\dim E_0(A) = n - \text{rg}A = n-1$  et  $\dim E_1(A) = 1$  (valeur propre simple).

Puisque  $\dim E_0(A) + \dim E_n(A) = n$ ,  $A$  est diagonalisable semblable à  $D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$ .

Bilan :

- $n$  valeurs propres distinctes  $\Rightarrow A$  diagonalisable ;
- $\sum \dim E_\lambda(A) = n \Rightarrow A$  diagonalisable ;
- $\chi_A$  non scindé  $\Rightarrow A$  non diagonalisable ;
- $\exists \lambda \in \text{Sp} A, \dim E_\lambda(A) < m_\lambda(A) \Rightarrow A$  non diagonalisable.

## 5.4.5 Diagonalisation

### 5.4.5.1 D'un endomorphisme

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable.

Pour diagonaliser l'endomorphisme  $u$ , il suffit d'exhiber une base propre en considérant, par exemple, une base adaptée à la décomposition

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

**Exemple** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base  $e = (e_1, e_2, e_3)$ .

Diagonalisation de  $u \in \mathcal{L}(E)$  dont la matrice dans  $e$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\chi_u = X(X-1)(X-2)$ ,  $\text{Sp} u = \{0, 1, 2\}$ .

$\text{CardSp} u = 3 = \dim E$  donc  $u$  est diagonalisable.

$E_0(u) = ?$

Soit  $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in E$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$u(x) = 0 \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi  $E_0(u) = \text{Vect}(e_1 - e_2)$  et de même on obtient  $E_1(u) = \text{Vect}(-e_1 + e_2 + e_3)$ ,

$E_2(u) = \text{Vect}(e_2 + e_3)$ .

Soit  $\varepsilon_1 = e_1 - e_2$ ,  $\varepsilon_2 = -e_1 + e_2 + e_3$  et  $\varepsilon_3 = e_2 + e_3$ .

La famille  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $E$  (famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes ou base adaptée à la décomposition de  $E$  en somme directe de sous-espaces propres).

La matrice de  $u$  dans  $\varepsilon$  est

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En notant  $P$  la matrice de passage de  $e$  à  $\varepsilon$ , on a  $A = PDP^{-1}$ .

Ici

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### 5.4.5.2 D'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonalisable.

Notons  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . L'endomorphisme  $u$  canoniquement associé à la matrice  $A$  est diagonalisable. On peut introduire  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  base de vecteurs propres de  $u$ .

$$u(\varepsilon_j) = \lambda_j \varepsilon_j$$

La matrice de  $u$  dans la base  $\varepsilon$  est

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Par formule de changement de base

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \text{Mat}_{\varepsilon}$$

**Bilan :** On forme une matrice de passage  $P$  diagonalisant  $A$  en prenant pour colonnes les vecteurs propres de  $A$ . La matrice diagonale  $D$  obtenue a pour coefficients diagonaux les valeurs propres respectives des colonnes formant  $P$ .

**Exemple** Diagonalisation de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = (X-1)^2(X+1)^2 \text{ via } C_1 \leftarrow C_1 + C_4 \text{ et } C_2 \leftarrow C_2 + C_3.$$

$$\text{Sp}(A) = \{1, -1\}.$$

$$E_1(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), E_{-1}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$\dim E_1(A) + \dim E_{-1}(A) = 4$  donc  $A$  est diagonalisable.

Pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on a  $A = PDP^{-1}$ .

**Exemple** Soit  $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$ .

Diagonalisation de  $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

$$\chi_{R(\theta)} = X^2 - 2 \cos \theta X + 1.$$

$$\Delta = -4 \sin^2 \theta < 0$$

Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

La matrice  $R(\theta)$  n'est pas diagonalisable car  $\chi_{R(\theta)}$  non scindé.

Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

On a

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(R_{\theta}) = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$$

et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{e^{i\theta}}(R(\theta)) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta x - \sin \theta y = e^{i\theta} x \\ \sin \theta x + \cos \theta y = e^{i\theta} y \end{cases} \Leftrightarrow ix + y = 0$$

On en déduit

$$E_{e^{i\theta}}(R(\theta)) = \text{Vect} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par conjugaison

$$E_{e^{-i\theta}}(R(\theta)) = \text{Vect} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour  $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , on a  $R(\theta) = PD(\theta)P^{-1}$  avec

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

## 5.4.6 Applications

### 5.4.6.1 Calcul des puissances d'une matrice

Si  $A$  est diagonalisable, on peut écrire  $A = PDP^{-1}$  avec  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $D$  diagonale. On a alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PD^kP^{-1}$$

**Exemple** Calcul des puissances de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$\chi_A = X^2 - 5X + 6. \text{ Sp } A = \{2, 3\}.$$

Après résolution

$$E_2(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = 2^n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Remarque** Si l'on étudie un couple  $(u_n, v_n)$  de suites réelles vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 4v_n \end{cases}$$

l'étude qui précède permet d'exprimer  $(u_n, v_n)$  en fonction de  $(u_0, v_0)$ .

En effet, en introduisant  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ , on a  $X_{n+1} = AX_n$  et donc  $X_n = A^n X_0$ .

## 5.4.6.2 Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

## Théorème

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme diagonalisable et  $v \in \mathcal{L}(E)$ .

On a équivalence entre :

(i)  $v$  commute avec  $u$  ;

(ii) les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .

dém. :

(i)  $\Rightarrow$  (ii) déjà vue.

(ii)  $\Leftarrow$  (i) Supposons (ii).

Puisque  $u$  est diagonalisable

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}u} E_{\lambda}(u)$$

Pour  $\lambda \in \text{Sp}u$  et  $x \in E_{\lambda}(u)$  :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$

et

$$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = \lambda v(x)$$

car  $v(x) \in E_{\lambda}(u)$ .

Ainsi, les endomorphismes  $u \circ v$  et  $v \circ u$  coïncident sur tous les sous-espaces propres de  $u$ .

Puisque  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}u} E_{\lambda}(u)$ , ces endomorphismes sont égaux sur  $E$ .

□

## 5.4.6.3 Résolution d'équation matricielle

Exemple Résolvons l'équation matricielle

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Posons  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

Si  $M$  est solution alors  $MD = M^3 = DM$ .

Les solutions sont à rechercher parmi les matrices commutant avec  $D$ .

Pour  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , la relation  $MD = DM$  donne  $\begin{pmatrix} a & 4b \\ c & 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4c & 4d \end{pmatrix}$  et donc  $b = c = 0$ .

Ainsi, la matrice  $M$  est diagonale.

Pour  $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ , l'équation  $M^2 = D$  équivaut à  $\begin{cases} a^2 = 1 \\ d^2 = 4 \end{cases}$ .

Ainsi, les solutions de l'équation sont

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Remarque** L'équation de degré 2 ici résolue possède plus de deux solutions car l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  n'est pas intègre.

**Exemple** Résolvons l'équation matricielle

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Posons  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .  $\chi_A = X^2 - 5X + 4 = (X - 1)(X - 4)$ .

$\text{Sp}A = \{1, 4\}$  et  $A$  est diagonalisable.

$E_1(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $E_4(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Pour  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

$M^2 = A \Leftrightarrow M^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}M^2P = D \Leftrightarrow (P^{-1}MP)^2 = D$ .

Ainsi, les solutions de l'équation étudiée sont  $PD_1P^{-1}$ ,  $PD_2P^{-1}$ ,  $PD_3P^{-1}$  et  $PD_4P^{-1}$ .

## 5.5 Trigonalisabilité

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### 5.5.1 Endomorphisme trigonalisable

#### Définition

Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit **trigonalisable** s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure. Une telle base est dite **base de trigonalisation** de l'endomorphisme  $u$ .

**Exemple** Un endomorphisme diagonalisable est a fortiori trigonalisable.

#### Théorème

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de l'espace  $E$ .

On a équivalence entre :

- (i) la base  $e$  trigonalise un endomorphisme  $u$  ;
- (ii)  $\forall 1 \leq k \leq n$ ,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  est stable par  $u$

dém. :

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Si la matrice  $A = (a_{i,j})$  de  $u$  dans la base  $e$  est triangulaire supérieure alors

$$\forall 1 \leq k \leq n, u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

On en déduit

$$\forall 1 \leq k \leq n, u(e_1), \dots, u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \text{ stable par } u$$

puis (ii) par combinaison linéaire.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Supposons (ii). On a en particulier

$$\forall 1 \leq k \leq n, u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

et donc la matrice de  $u$  dans  $e$  est triangulaire supérieure.

□

#### Corollaire

Le premier vecteur d'une base de trigonalisation est un vecteur propre de l'endomorphisme.

## 5.5.2 Matrice trigonalisable

## Définition

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

## Théorème

Soit  $A$  la matrice d'un endomorphisme  $u$  dans une base  $e$  de  $E$ . On a équivalence entre :

- (i)  $A$  est trigonalisable ;
- (ii)  $u$  est trigonalisable.

dém. :

Les matrices semblables à  $A$  correspondent à celles pouvant représenter l'endomorphisme  $u$ .

□

**Exemple** En particulier,  $A$  est trigonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$  l'est.

## 5.5.3 Caractérisation

## Théorème

Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a équivalence entre :

- (i)  $u$  est trigonalisable ;
- (ii)  $\chi_u$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  ;

On a un critère analogue pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

dém. :

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons  $u$  trigonalisable. Il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\chi_u(X) = \chi_T(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

Ainsi  $\chi_u$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  (et les coefficients diagonaux de  $T$  sont les valeurs propres de  $u$  comptées avec multiplicité).

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Raisonnons matriciellement. Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrons que si le polynôme caractéristique de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est scindé alors  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Cas  $n = 1$  : C'est immédiat, une matrice  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$  étant déjà triangulaire supérieure.

Supposons la propriété établie au rang  $n - 1 \geq 1$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de polynôme caractéristique  $\chi_A$  scindé.

Le polynôme  $\chi_A$  possède au moins une racine  $\lambda_1$  est celle-ci est valeur propre de  $A$ . Soit  $e_1 \in \mathbb{K}^n$  un vecteur propre associé. On complète ce vecteur en une base de  $\mathbb{K}^n$  de la forme  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ . La matrice de l'endomorphisme  $u$  canoniquement associé à la matrice  $A$  dans la base  $e$  est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\chi_A(X) = (X - \lambda)\chi_{A'}(X)$$

et donc le polynôme caractéristique de  $A'$  est scindé. Par hypothèse de récurrence, il existe  $P' \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$  telle que la matrice  $P'^{-1}A'P'$  soit triangulaire supérieure. Considérons alors la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

La matrice  $P$  est inversible avec

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix}$$

Par produit par blocs

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & P'^{-1}A'P' \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure.

Finalement,  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Récurrence établie.

□

**Corollaire**

Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie est trigonalisable.  
Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

dém. :

Car de polynôme caractéristique scindé.

□

**Corollaire**

Si  $\chi_u$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  alors  $\text{tr}(u)$  et  $\det(u)$  sont la somme et le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité.  
Idem pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

dém. :

$u$  est trigonalisable et peut donc être représenté par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & \ddots \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de  $u$  est alors

$$\prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

Les  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont alors les valeurs propres comptées avec multiplicité.

Parallèlement  $\text{tr}(u) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$  et  $\det(u) = \lambda_1 \dots \lambda_n$ .

□

**Remarque** Ce résultat peut aussi se voir comme une conséquence de l'écriture

$$\chi_u(\lambda) = \lambda^n - \text{tr}(u)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$$

**Remarque** Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  le résultat qui précède s'applique automatiquement.

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on peut interpréter  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et affirmer que  $\text{tr} A$  et  $\det A$  sont la somme et le produit des valeurs propres complexes de  $A$  comptées avec multiplicité.

**Exemple** Déterminons les valeurs propres de

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \neq O_n$$

La matrice  $A$  est de rang 1 donc  $\dim E_0(A) = \dim \ker A = n - 1$ .

0 est alors valeur propre de  $A$  de multiplicité au moins  $n - 1$ . Le polynôme  $\chi_A$  s'écrit alors

$$\chi_A = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda)$$

Il est donc scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  et la trace de  $A$  est alors la somme des valeurs propres de  $A$ . On en déduit

$$\text{Sp} A = \{0, a_1 + \cdots + a_n\}$$

### 5.5.4 Trigonalisation

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\chi_A$  soit scindé dans  $\mathbb{K}[X]$ .

**Protocole :**

Pour trigonaliser  $A$ , on détermine  $\lambda_1$  valeur propre de  $A$  et  $e_1$  vecteur propre associé.

Le vecteur  $e_1$  définit la première colonne d'une matrice de passage  $Q$  que l'on construit inversible. On a alors

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

avec  $A'$  trigonalisable. En déterminant  $P'$  inversible telle que

$$P'^{-1}A'P' = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ & \ddots \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix}$$

on forme alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix}$$

et alors

$$P^{-1}Q^{-1}AQP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ & \ddots \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix}$$

de sorte que  $R = QP$  trigonalise la matrice  $A$ .

**Exemple** Trigonalisation de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\chi_A = -(X+1)^3, \text{ Sp } A = \{-1\}$$

La matrice  $A$  est trigonalisable sans être diagonalisable car  $A \neq -I_3$ .

$$E_{-1}(A) = \text{Vect } e_1 \text{ avec } e_1 = (1, 1, 0).$$

Considérons

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on considère

$$A' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1}(A') = \text{Vect}(2, -1)$$

Considérons

$$P' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, P'^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exemple** Trigonalisation de

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

$$\chi_A = -(X+2)(X-1)^2.$$

1 est valeur propre double et -2 est valeur propre simple

$$E_{-2}(A) = \text{Vect}(1, 0, 1), E_1(A) = \text{Vect}(1, -1, 1)$$

La matrice  $A$  n'est pas diagonalisable, cependant elle est trigonalisable.

Considérons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3.3.5 Nilpotence

#### Définition

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit nilpotent s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  vérifiant  $u^p = \vec{0}$ .

Le plus petit  $p$  vérifiant cette identité est appelé indice de nilpotence de  $u$ .

Ce vocabulaire se transpose aux matrices

**Exemple** Si  $A = \text{Mat}_e u$  alors la matrice  $A$  est nilpotente si, et seulement si, l'endomorphisme  $u$  l'est.

**Exemple** La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  est nilpotente car  $A^2 = O_2$ .

**Exemple** Soit  $A$  une matrice triangulaire supérieure stricte de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc}$$

Montrons (proprement) que  $A^n = O_n$ .

Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

Notons  $e = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

On a  $u(e_1) = 0$  et pour tout  $2 \leq i \leq n$ , on a  $u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1})$ .

Par suite

$$\text{Im } u = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$$

puis

$$\text{Im } u^2 \subset u(\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_{n-1})) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-2})$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall 1 \leq k \leq n-1, \text{Im } u^k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k-1})$$

En particulier  $\text{Im } u^{n-1} \subset \text{Vect}(e_1)$  puis  $\text{Im } u^n \subset \{0_E\}$  ce qui donne  $u^n = \vec{0}$ .

On peut alors conclure  $A^n = O_n$ .

#### Théorème

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre :

(i)  $u$  est nilpotent ;

(ii)  $u$  est trigonalisable avec 0 pour seule valeur propre.

Ce résultat se transpose aux matrices de la façon suivante :

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente si, et seulement si,  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte

dém. :

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Car une matrice triangulaire supérieure figurant  $u$  a pour coefficients diagonaux les valeurs propres de  $u$ , elle est donc triangulaire supérieure stricte et par conséquent nilpotente.

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Raisonnons matriciellement. Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ , montrons que si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente, alors  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Cas  $n = 1$  : Une matrice nilpotente de taille 1 est nécessairement nulle.

Supposons la propriété établie au rang  $n - 1 \geq 1$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  nilpotente.

La matrice  $A$  ne peut être inversible et donc  $\ker A \neq \{0\}$ . Soit  $e_1$  un vecteur non nul de  $\ker A$ . On complète ce vecteur  $e_1$  en une base de  $\mathbb{K}^n$  de la forme  $e = (e_1, \dots, e_n)$ .

La matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  dans la base  $e$  est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ 0 & A' \end{pmatrix} \text{ avec } A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

La matrice  $B$  est semblable à  $A$  et donc elle aussi nilpotente. On en déduit que le bloc  $A'$  est nilpotent.

Par hypothèse de récurrence, il existe  $P' \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$  telle que  $P'^{-1}A'P'$  soit triangulaire supérieure stricte. Formons alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Par produit par blocs

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & \star' \\ 0 & P'^{-1}A'P' \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure stricte.

Finalement,  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte.

Récurrence établie.

□

**Remarque** Le polynôme caractéristique de  $u$  (ou de  $A$ ) est alors  $X^n$ .

**Corollaire**

Si  $u$  est un endomorphisme nilpotent d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  alors

$$u^n = \vec{0}$$

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente alors  $A^n = O_n$ .