

Correction.

1. Puisque X est un vecteur propre de $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ associé à la valeur propre λ , on a : $\lambda X = AX$. Comparer, pour tout $i \in \{1, n\}$, la i -ième ligne de chaque membre de cette égalité matricielle donne bien :

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j. \quad (4)$$

Pour $i = i_0$. On obtient, d'après l'inégalité triangulaire et le fait que $|x_j| \leq |x_{i_0}|$ pour tout $j \in \{1, n\}$:

$$|\lambda| \cdot |x_{i_0}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| \cdot |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|.$$

Or $|x_{i_0}| > 0$ (sinon, toutes les coordonnées du vecteur X étant inférieures ou égales à $|x_{i_0}|$, on aurait : $\forall i \in \{1, n\}, x_i = 0$, ce qui est impossible puisqu'un vecteur propre est non nul). Donc en divisant par $|x_{i_0}|$, on obtient :

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}|.$$

On a bien sûr $\sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| \leq \max_{i \in \{1, n\}} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$, donc :

$$|\lambda| \leq \max_{i \in \{1, n\}} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}.$$

n 2) D'après la question 1), on a, en inspectant la somme des coefficients de chaque ligne de $A_n(\alpha, \beta)$ (attention à la première et à la dernière) :

$$|\lambda| \leq \max\{|\alpha| + |\beta|, |\alpha| + 2|\beta|, |\beta| + |\alpha|\}.$$

On a évidemment $|\beta| \leq 2|\beta|$ car $|\beta| > 0$, donc :

$$\lambda \leq |\alpha| + 2|\beta|.$$

3) Pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, la question 2) montre que toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$ vérifie :

$$|\lambda| \leq 2, \text{ c'est-à-dire } \frac{\lambda}{2} \in [-1, 1].$$

Or, la fonction cosinus est surjective de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, donc pour toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$, il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\lambda = 2 \cos(\theta)$.

4) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour calculer $\chi_{A_n}(\lambda) = \det(M_n - \lambda A_n(0, 1))$, on développe par rapport à la dernière colonne ou ligne ce déterminant et on obtient :

$$\chi_{A_n(0,1)}(\lambda) = \lambda \cdot \chi_{A_{n-1}(0,1)}(\lambda) + \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne : il égale $-\chi_{A_{n-2}(0,1)}(\lambda)$. Ceci vaut pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et on en déduit :

$$\chi_{A_n(0,1)} = X \cdot \chi_{A_{n-1}(0,1)}(X) - \chi_{A_{n-2}(0,1)}(X).$$

On en déduit $U_n(X) = 2XU_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)$.

5) Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ que :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}. \quad (5)$$

Pour $n = 1$, on a : $A_1(0, 1) = (0)$, donc $\chi_{A_1} = X$, et : $U_1 = 2X$. On en déduit :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_1(\cos(\theta)) = 2 \cos(\theta).$$

Or :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 2 \cos(\theta).$$

D'où la proposition au rang $n = 1$. À présent, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et supposons que (5) est vérifiée pour tout rang $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $\theta \in]0, \pi[$ on a :

$$\begin{aligned} U_n(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) U_{n-1}(\cos(\theta)) - U_{n-2}(\cos(\theta)), \\ \text{et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :} \\ \forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) &= 2 \cos(\theta) \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{2 \cos(\theta) \sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

Or, d'après nos formules de trigonométrie, nous avons pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$\sin((n-1)\theta) + \sin((n+1)\theta) = 2 \sin(n\theta) \cos(\theta),$$

donc :

$$\forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

D'où la proposition au rang n . Ayant l'initialisation et l'hérédité, par récurrence forte sur n nous avons démontré :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \forall \theta \in]0, \pi[, \quad U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

6. Les valeurs propres de $A_n(0, 1)$ sont exactement les racines de son polynôme caractéristique. Or, pour tout $\theta \in]0, \pi[$, on a :

$$\chi_{A_n(0,1)}(2 \cos(\theta)) = U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Vérifions à quelle condition sur θ cette quantité s'annule. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$U_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \sin((n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \quad (n+1)\theta = j\pi.$$

$$U_n(\cos(\theta)) = 0 \Leftrightarrow \sin((n+1)\theta) = 0 \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \quad (n+1)\theta = j\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \frac{j\pi}{n+1}.$$

On en déduit que χ_{A_n} admet pour racines tous les réels de l'ensemble :

$$\left\{ 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Notons que cet ensemble contient n éléments : en effet, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a $\frac{j\pi}{n+1} \in]0, \pi[$, et le cosinus est strictement décroissant sur $]0, \pi[$, donc il y a injectif. Ceci prouve que les $2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$, pour $j \in \{1, \dots, n\}$ sont distincts.

Ainsi, nous avons la n racines de χ_{A_n} ; or χ_{A_n} est de degré n , en tant que polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre n : il s'agit donc de l'intégralité des racines de χ_{A_n} . On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est :

$$\left\{ \lambda_n = 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Puisque $A_n(0, 1)$ admet n valeurs propres distinctes, elles les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$$

est un vecteur propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -2 \cos(\theta_j) x_1 + x_2 = 0, \\ \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \quad x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j) x_k + x_{k+1} = 0, \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j) x_n = 0. \end{cases}$$

8) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation indiquée. L'équation caractéristique de sa relation de récurrence linéaire est :

$$r^2 - 2 \cos(\theta_j) r + 1 = 0,$$

qui est de discriminant :

$$4 \cos^2(\theta_j) - 4 = -4 \sin^2(\theta_j) < 0$$

car $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1} \in]0, \pi[$. On en déduit que les racines de l'équation sont complexes, égales à :

$$\cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j) = e^{i\theta_j}, \quad \text{et} \quad \cos(\theta_j) - i \sin(\theta_j) = e^{-i\theta_j},$$

alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \alpha \cos(k\theta_j) + \beta \sin(k\theta_j).$$

L'hypothèse $u_0 = 0$ implique $\alpha = 0$, tandis que $u_{n+1} = 0$ équivaut à :

$$\beta \sin((n+1)\theta_j) = 0.$$

Or, $\sin((n+1)\theta_j) = 0$ donc $u_{n+1} = 0$ si et seulement si $0 = 0$, ce qui est toujours vérifié.

Donc X est un vecteur propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre λ_j si et seulement si ses coordonnées sont les premiers termes d'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de E vérifiant $u_0 = u_{n+1} = 0$. On en déduit que l'espace propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$ est :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\{\sin(k\theta_j)\}_{k \in \{1, \dots, n\}}).$$

tel que : $u_0 = u_{n+1} = 0$. D'après la question précédente, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \alpha \cos(k\theta_j) + \beta \sin(k\theta_j).$$

On en déduit que l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$ est :

$$\{(\beta \sin(k\theta_j))_{k \in \mathbb{N}} \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\{\sin(k\theta_j)\}_{k \in \mathbb{N}}).$$

9) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Si $\beta = 0$, alors $A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n$. Son unique valeur propre est α , et l'espace propre associé est $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Supposons donc $\beta \neq 0$ à présent. On a :

$$A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0, 1).$$

On en déduit, après de menus calculs, que $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$

est un vecteur propre de $A_n(\alpha, \beta)$ associé à $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$A_n(0, 1) X = \frac{\lambda - \alpha}{\beta} X.$$

si et seulement si X est un vecteur propre de $A_n(0, 1)$ associé à $\frac{\lambda - \alpha}{\beta}$. Or nous avons démontré dans la question que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est :

$$\left\{ 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Donc λ est une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$ si et seulement s'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$\frac{\lambda - \alpha}{\beta} = 2 \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right).$$

L'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ est donc :

$$\left\{ \alpha + 2\beta \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

La réflexion ci-dessus, montre alors que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, le sous-espace propre de $A_n(\alpha, \beta)$ associé à la valeur propre $\alpha + 2\beta \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)$ est :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\{\sin(k\theta_j)\}_{k \in \{1, \dots, n\}}).$$

$$r^2 - 2 \cos(\theta_j) r + 1 = 0,$$

qui est de discriminant :

$$4 \cos^2(\theta_j) - 4 = -4 \sin^2(\theta_j) < 0$$

car $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1} \in]0, \pi[$. On en déduit que les racines de l'équation sont complexes, égales à :

$$\cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j) = e^{i\theta_j}, \quad \text{et} \quad \cos(\theta_j) - i \sin(\theta_j) = e^{-i\theta_j},$$

alors il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \alpha \cos(k\theta_j) + \beta \sin(k\theta_j).$$

L'hypothèse $u_0 = 0$ implique $\alpha = 0$, tandis que $u_{n+1} = 0$ équivaut à :

$$\beta \sin((n+1)\theta_j) = 0.$$

Or, $\sin((n+1)\theta_j) = 0$ donc $u_{n+1} = 0$ si et seulement si $0 = 0$, ce qui est toujours vérifié.

Donc X est un vecteur propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre λ_j si et seulement si ses coordonnées sont les premiers termes d'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de E vérifiant $u_0 = u_{n+1} = 0$. On en déduit que l'espace propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre $2 \cos(\theta_j)$ est :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}} (\{\sin(k\theta_j)\}_{k \in \{1, \dots, n\}}).$$

tel que $u_0 = u_{n+1} = 0$. D'après la question précédente, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \alpha \cos(k\theta_j) + \beta \sin(k\theta_j).$$

On en déduit que l'ensemble des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$ est :

$$\{(\beta \sin(k\theta_j))_{k \in \mathbb{N}} \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}_{\mathbb{R}} (\{\sin(k\theta_j)\}_{k \in \mathbb{N}}).$$

9) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Si $\beta = 0$, alors $A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n$. Son unique valeur propre est α , et l'espace propre associé est $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Supposons donc $\beta \neq 0$ à présent. On a :

$$A_n(\alpha, \beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0, 1).$$

On en déduit, après de menus calculs, que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ est un vecteur propre de $A_n(\alpha, \beta)$ associé à $\lambda \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$A_n(0, 1) \mathbf{x} = \frac{\lambda - \alpha}{\beta} \mathbf{x},$$

si et seulement si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre de $A_n(0, 1)$ associé à $\frac{\lambda - \alpha}{\beta}$. Or nous avons démontré dans la question que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est :

$$\left\{ 2 \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) ; j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Donc λ est une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$ si et seulement s'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$\frac{\lambda - \alpha}{\beta} = 2 \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right).$$

L'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ est donc :

$$\left\{ \alpha + 2\beta \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right) ; j \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

La réflexion ci-dessus, montre alors que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, le sous-espace propre de $A_n(\alpha, \beta)$ associé à la valeur propre $\alpha + 2\beta \cos \left(\frac{j\pi}{n+1} \right)$ est :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}} (\{\sin(k\theta_j)\}_{k \in \{1, \dots, n\}}).$$