

Rappel.

Donc $E < \infty$

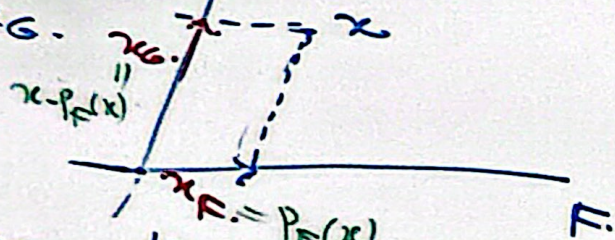
$$E = F \oplus G$$

soit

P_F : projection sur F // à G .

$\forall x \in E$,

$$x = x_F + x_G.$$



$$P_F(x) = x_F, \quad \forall x \in E.$$

$$\rightarrow P_F \circ P_F(x) = P_F(x) = x_F, \quad \forall x \in E.$$

$$\Rightarrow \boxed{P_F \circ P_F = P_F} \Rightarrow P_F \text{ projection}$$

$$\text{Im } P_F = F = \{x \in E \mid P_F(x) = x\}$$

$$\boxed{\text{Im } P_F = \ker(P_F - \text{id}_E)}$$

$$\boxed{\ker P_F = G.}$$

$$\text{Donc } \boxed{\text{Im } P_F \oplus \ker P_F = E. (*)}$$

$$\rightarrow \forall x \in E; \quad x = \underbrace{P_F(x)}_{\in \text{Im } P_F} + \underbrace{x - P_F(x)}_{\in \ker P_F}$$

soit P_G : projection sur G // à F .

$$\Rightarrow P_G + P_F = \text{id}_E.$$

$$P_G \circ P_F = 0 = P_F \circ P_G.$$

• Soit p un projecteur. $p \circ p = p$
 et $p \neq 0$ et $p \neq \text{id}_E$.

Alors $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$.

En fait:

ona. $\varphi(x) = x^2 - x$ est un poly
 annulateur de $p \Rightarrow$

$\text{Sp}(p) \subset \{\text{racines de } \varphi\} = \{0, 1\}$.

"ona. $p \neq \text{id}_E \Rightarrow p - \text{id}_E \neq 0$.

$\Rightarrow \ker(p - \text{id}_E) \neq E \Rightarrow \ker p \neq \{0\}$
 $\Rightarrow 0 \in \text{Sp}(p)$.

* $p \neq 0 \Rightarrow \ker p \neq E \Rightarrow \ker(p - \text{id}_E) \neq \{0\}$
 $\Rightarrow 1 \in \text{Sp}(p)$
 $\Rightarrow \text{Sp}(p) = \{0, 1\}$

ona. $E = \ker p \oplus \ker(p - \text{id}_E)$

$$E = E_0 \oplus E_1$$

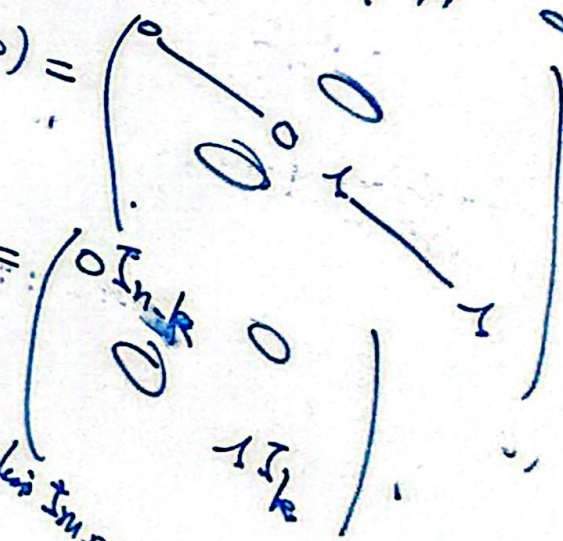
$\Rightarrow p$ est diagonalisable.

* Rq. $\text{rg } p = \text{tr}(p)$

$\parallel$
 $\dim \text{Im } p$

$\exists B = B_0 \cup B_1$ base de E avec
 $B_0 = \text{base de } E_0$
 $B_1 = \text{base de } E_1$

$\text{Mat}(p, B) =$



$\ker p = E_0 = \text{dim Im } p$
 $= \text{rg } p$