

Réduction des matrices et des endomorphismes

Dans tout ce chapitre, E désigne un IK -e.v. avec $IK = \mathbb{R}$ ou $IK = \mathbb{C}$ et $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E .

Sous espace stable .

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e.v de E .
on dit que F est stable par u si $u(F) \subset F \iff \forall x \in F, u(x) \in F$.

Exemple

Soit : $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto \varphi(P) = XP'$.

φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, le sous espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par $\varphi \iff \varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e.v de E engendré par une famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ ($F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$).
 F est stable par $u \iff u(e_i) \in F, \forall 1 \leq i \leq p$.

Exemple

Soit : $\varphi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
 $P \mapsto \varphi(P) = (X^2 + 1)P'' + XP'$.

On vérifie que $\forall 0 \leq k \leq n$, X^k est stable par φ , alors $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ .

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ F et G deux s.e.v de E . Alors
i) $F + G$ est stable par u .
ii) $F \cap G$ est stable par u .

Proposition

Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$ (u et v commutent). Alors
i) $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v .
ii) $\forall \lambda \in IK$, $\text{Ker}(u - \lambda)$ et $\text{Im}(u - \lambda)$ sont stables par v .

Endomorphisme induit .

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e.v de E .
Si F est un s.e.v stable par u , alors u_F , la restriction de u à F , est un endomorphisme de F appelé endomorphisme de F induit par u c.à.d :

$$u_F : F \longrightarrow F$$

$$x \mapsto u_F(x) = u(x)$$

Proposition

$$\ker(u_F) = \{x \in F \text{ tel que } u_F(x) = 0\} \\ = \{x \in F \text{ tel que } u(x) = 0\}.$$

$$\ker(u_F) = F \cap \ker u$$

On en déduit :

- Si u est injective, alors u_F est injective. (La réciproque est fausse).
- Si $\dim F < \infty$ et u bijective, alors u_F est bijective et $u_F(F) = F$

$$\bullet \quad \boxed{\operatorname{Im} u_F \subseteq \operatorname{Im} u \cap F.}$$

Interprétation matricielle

Soient E un K - e.v. de dimension finie $n \geq 2$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e.v stable par u avec $\dim F = p < n$.

On pose $B_F = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de F et

$B = (e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E .

Puisque F est stable par u , alors $u(B_F) \subset F \iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, u_{e_k} \in \operatorname{vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Alors :

$$M(u, B) = \begin{pmatrix} u(e_1) & \dots & u(e_p) & u(e_{p+1}) & \dots & u(e_n) \\ A & & C & & & \\ 0 & & D & & & \end{pmatrix}$$

avec $A = M(u_F, B_F) \in M_p(K)$, $C \in M_{p, n-p}(K)$ et $D \in M_{n-p}(K)$

Conclusion : Si F est un s.e.v de E stable par u , alors il existe une base B de E telle $M(u, B)$ soit triangulaire supérieur par blocs.

On en déduit que $\det(u) = \det A \cdot \det C$

Généralisation : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F_1, F_2, \dots, F_p$ des s.e.v stables par u tels que $\dim F_k = n_k$ et

$$E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$$

Soit B_k une base de F_k , alors $B = (B_1, B_2, \dots, B_p)$ est une base de E

Puisque F_k est stable par u , alors $u(B_k) \in \operatorname{vect}\{B_k\}$, d'où

$$M(u, B) = \begin{pmatrix} u(B_1) & u(B_2) & \dots & u(B_p) \\ A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & A_p \end{pmatrix}$$

avec $A_k = M(u_{F_k}, B_k) \in M_{n_k}(K)$.

On en déduit, $\det M(u, B) = \prod_{i=1}^p \det(A_i)$.

Éléments propres d'un endomorphisme

Valeur propre et vecteur propre

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in IK$.

- On dit que λ est **valeur propre** (v.p) de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$

On note $\operatorname{Sp}_K(u)$ l'ensemble des v.p de u dans IK .

- Le vecteur $x \neq 0_E$ vérifiant $u(x) = \lambda x$ est appelé **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .

Sous espace propre

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u

$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$: est appelé **le sous espace propre** de u associé à la valeur propre λ .

On note que $E_\lambda(u) = \{0\} \cup \{ \text{les vecteurs propres de } u \}$.

Remarque

- i) Si x et y sont deux vecteurs propres de u associé à une valeur propre λ , alors $x + y$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ .
- ii) Si x est un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ , alors αx est un vecteur propre de u associé à la même valeur propre λ , $\forall \alpha \in IK^*$.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in IK$

- $$\lambda \text{ est une v.p de } u \iff \ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$$
- $$\iff (u - \lambda Id_E) \text{ n'est pas injective}$$
- $$\iff \dim E < \infty$$
- $$\iff (u - \lambda Id_E) \text{ n'est pas bijective.}$$
- $$\iff \det(u - \lambda Id_E) = 0.$$

Propriétés

- i) λ est une valeurs propre de $u \iff E_\lambda(u) \neq \{0_E\} \iff \dim E_\lambda \geq 1$
- ii) Si λ est une valeurs propre de u , alors E_λ est stable par u .
- iii) Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$ et λ une valeurs propre de u , alors le sous espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v .

Proposition

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres de u deux à deux distincts, alors

- i) Les sous espaces propres $E_{\lambda_1}(u), E_{\lambda_2}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe c.à.d.
- $E_{\lambda_1}(u) + E_{\lambda_2}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u) = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u).$

Remarque

- ii) Pour tout $1 \leq i \leq p$, on considère x_i un vecteur propre associé à λ_i , alors la famille de vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est libre.
- iii) Si $\dim(E) < \infty$, alors $S_p(u)$ est finie et $\text{card}(S_p(u)) \leq \dim(E)$.

Éléments propres d'une matrice carrée

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \in M_n(IK)$

- On dit que $\lambda \in IK$ est une valeur propre de A s'il exist $X \in M_n(IK) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$
- L'élément $X \neq 0$ vérifiant $AX = \lambda X$ est appelé vecteur propre de A associé à la v.p λ .
- On note $\text{Sp}_{IK}(A) = \{\text{l'ensemble des v.p de } A \text{ dans } IK\}$
- Soit λ une v.p de A , on définit $E_\lambda(A) = \{X \in M_{n,1}(IK) / AX = \lambda X\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$: le sous espace propre de A associé à la valeur propre λ .

Remarques

- 1) λ v.p de $A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$
- 2) Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.
- 3) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ $\dim E < \infty$ et B une base de E , alors

λ est une v.p de $u \iff \det(u - \lambda Id_E) = 0$

$$\iff \det(M(u, B) - \lambda I_n) = 0$$

$$\iff \lambda \text{ est une v.p de } M(u, B).$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Sp}_K(u) = \text{Sp}_K(M(u, B))}$$

Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $A \in M_n(K)$

On définit le polynôme : $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$ appelé polynôme caractéristique de la matrice A .

On note que :

λ est une v.p. de A

λ est une racine du polynôme caractéristique de A

Ainsi

$$\iff \det(\lambda I_n - A) = 0$$

$$Sp_K(A) = \{\text{racines du polynôme caractéristique}\}$$

Conséquences

1) Soit $A \in M_n(K)$, alors $\text{card}(Sp_K(A)) \leq n$.

2) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

3) i) Si $IK = \mathbb{C}$, alors $Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.

ii) Si $IK = \mathbb{R}$ et n est impaire, alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.

iii) Si $IK = \mathbb{R}$ et n est paire, on peut avoir $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$.

4) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$

Si A est triangulaire (supérieur ou inférieur) ou diagonale, alors

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$$

D'où $Sp(A) = \{a_{ii}, 1 \leq i \leq n\}$ = les termes de la diagonale de A .

Proposition

i) Soit $M = \begin{pmatrix} A & C \\ O & D \end{pmatrix} \in M_n(K)$ tel que $A \in M_p(K)$, $C \in M_{p,n-p}(K)$ et $D \in M_{n-p,n-p}(K)$

Alors $\chi_M(X) = \chi_A(X) \chi_D(X)$



$$\text{ii) Si } A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \chi_A(X) = \prod_{i=1}^p \chi_{A_i}(X)$$

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit E un R-e.v de $\dim E = n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = \det(X \text{id}_E - u)$.

Soit B une base de E et $A = \text{Mat}(u, B)$, alors $\chi_u(X) = \chi_A(X)$.

Proposition

i) Soit E un R-e.v de $\dim E = n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ Alors :

$$\chi_u(X) = X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_1X + (-1)^n \det u.$$

ii) Soit $A \in M_n(K)$, alors

$$\chi_A(X) = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_1X + (-1)^n \det A$$

Exemple :

Pour $A \in M_2(K)$, alors

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det A.$$

Conséquences :

1) i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$, alors $\deg(\chi_u) = n$

ii) Si E est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, alors $Sp_{\mathbb{C}}(u) \neq \emptyset$.

iii) Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel tel que $\dim E$ est impaire, alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.

2) Si $A \in M_n(K)$, alors : $\deg(\chi_A) = n$.

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(IK)$) alors $\chi_u(0) = (-1)^n \det u$ (resp. $\chi_A(0) = (-1)^n \det A$).

Proposition

Soit E un IK -e.v tel que $\dim E = n \geq 1$

Soit F un s.e.v. de E stable par u et u_F l'endomorphisme de F induit par u . Alors

χ_{u_F} : le polynôme caractéristique de u_F divise χ_u

On en déduit $\boxed{Sp_{IK}(u_F) \subset Sp_{IK}(u)}$.

Ordre de multiplicité d'une v.p

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(IK)$).

- On dit que $\lambda \in Sp_{IK}(u)$ (resp. $\lambda \in Sp_{IK}(A)$), est une v.p de u (resp. de A) d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ si c'est une racine du polynôme caractéristique de u (resp. de A) de multiplicité m (c.a.d $\chi_u(X) = (X - \lambda)^m Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$. On notera $mul(\lambda) = m$).
- On dit que $\lambda \in Sp_{IK}(u)$ (resp. $\lambda \in Sp_{IK}(A)$), est une v.p simple de u (resp. de A) si $mul(\lambda) = 1$.

Proposition

Soient E un IK -e.v de $\dim n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit λ une v.p de u et $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda Id_E)$ le sous espace propre associé, alors

$$\boxed{1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda = mul(\lambda)}$$

Conséquence :

Si λ est une v.p simple de u , alors $\dim E_\lambda(u) = 1$.

Diagonalisation des endomorphismes et des matrices

Dans la suite E est un IK -e.v. de dimension finie.

Endomorphisme diagonalisable

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

On dit que u est diagonalisable s'il existe une base B de E telle que $M(u, B)$ soit diagonale.

$\iff$

Il existe $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E telle que $M(u, B) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. ($v_k = \lambda_k v_k \ \forall k \in \{1, \dots, n\}$).

$\iff$

$B = (v_1, \dots, v_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u .

Application

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Sp(u) = \{\lambda\}$. Alors

u est diagonalisable $\iff u = \lambda Id_E$.

Matrice diagonalisable

Soit $A \in M_n(IK)$.

On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(IK)$ et une matrice diagonale D telle que $A = P D P^{-1}$. Dans ce cas la matrice D est formée par les valeurs propres composées avec leurs ordres de multiplicités.

Proposition

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E .

u est diagonalisable si et seulement si $\text{mat}(u, B)$ est diagonalisable.

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(IK)$)

Si u (resp. A) admet n valeurs propres 2 à 2 distincts ($\iff \chi_u$ (resp. χ_A) est scindé et à racine simple), alors u (resp. A) est diagonalisable.

Remarques :

1) La réciproque du théorème précédent est fausse en général c'est à

dire on peut avoir un endomorphisme diagonalisable mais le polynôme caractéristique n'est pas nécessairement à racines simples.

Proposition

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(IK)$), $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les v, p de u (resp. de A) 2 à 2 distincts. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- | | | |
|---|--------|--|
| i) u est diagonalisable | $\iff$ | i) A est diagonalisable |
| ii) $E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$ | $\iff$ | ii) $M_{n,1}(IK) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(A)$ |
| iii) $\dim E = \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(u))$ | $\iff$ | iii) $n = \sum_{i=1}^p \dim(E_{\lambda_i}(A))$ |

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(IK)$).
 u est diagonalisable (resp. A) $\iff \chi_u$ (resp. χ_A) est scindé dans $IK[X]$ et $\forall \lambda \in \text{Sp}_{IK}(u)$ (resp. $\text{Sp}_{IK}(A)$), $\dim E_{\lambda} = \text{mul}(\lambda)$.

Définition

a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

On dit que u est Trigonalisable s'il existe une base de E , $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ telle que $M(u, B)$ est triangulaire.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

On dit que A est Trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire, c. à d. il existe une matrice $P \in GL_n(K)$ et une matrice triangulaire T tels que :

$$A = PTP^{-1}$$

Remarques

1) Si A est trigonalisable ($A = PTP^{-1}$), alors la diagonale de T est formée par les valeurs propres de A comptée avec leurs ordre de multiplicité.

2) Si u (resp. A) est diagonalisable, alors u (resp. A) est trigonalisable.

La réciproque est fausse.

Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$,
 u est Trigonalisable $\iff M(u, B)$ est Trigonalisable.

Théorème

Soit E un IK e.v de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(IK)$.)

u (resp. A) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u (χ_A) est scindé sur IK .

Matrice et endomorphisme Trigonalisables

Dans cette section E un IK e. v de dimension $n \geq 1$.

Conséquence

- 1) Puisque tout polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ est scindé, alors toute matrice de $A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- 2) Si E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, alors tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.

Proposition

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$)

On suppose que χ_u (resp. χ_A) est scindé dans IK .

On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les v.p de u (resp. A) 2 à 2 distincts et on pose $m_i(\lambda_i) = m_i$. Alors :

$$\sum_{i=1}^p m_i \lambda_i = \text{tr}(u) \quad (\text{resp. } \text{tr}(A))$$

$$\prod_{i=1}^p (\lambda_i)^{m_i} = \det(u) \quad (\text{resp. } \det A).$$

Polynôme d'endomorphisme- Polynôme de matrice

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$), on note $u^0 = \text{Id}_E$ (resp. $A^0 = I_n$) et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad u^k = u \circ u \dots \circ u$ k fois (resp. $A^k = A \times A \dots \times A$ k fois).

Soit $P \in K[X]$, $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

On définit l'endomorphisme :

$$P(u) = a_0 \text{Id}_E + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n = \sum_{k=0}^n a_k u^k : \text{polynôme de l'endomorphisme } u.$$

$$(\text{resp. La matrice } P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n = \sum_{k=0}^n a_k A^k : \text{polynôme de la matrice } A.)$$

Exemple : 1) Soit $P(X) = 1 + X + 2X^2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$P(u) = \text{Id}_E + u + 2u^2.$$

- 2) Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\text{resp. } A \in M_n(K))$ et $P \in K[X]$, alors

$$P(D) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)).$$

- 3) Soit A une matrice diagonale par blocs $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_n)$, alors $P(A) = \text{diag}(P(A_1), \dots, P(A_n))$.
- 4) On considère un polynôme $P \in K[X]$ et une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors alors $P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & P(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$.

Proposition

- i) Soient $P, Q \in IK[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$.
- ii) Soit $P, Q \in K[X]$ $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$(P \cdot Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$$

$\Leftrightarrow$

L'application $\varphi_u : K[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'algèbres.

$$P \mapsto \varphi_u = P(u)$$

Remarques :

- (i) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in IK[X]$ alors

$$P(u) \circ u = u \circ P(u)$$

Il s'en suit que, $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im} P(u)$ sont stables par u .

- (ii) Soit $P, Q \in K[X]$ $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$$

Il s'en suit que, $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im} P(u)$ sont stables par $Q(u)$.

✿ Proposition

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$) et $P \in K[X]$.

Si λ est une v.p. de u (resp. A) associée à un vecteur propre x , alors $P(\lambda)$ est une v.p. de $P(u)$ (resp. $P(A)$) associée au même vecteur propre x .

✿ Polynôme annulateur

1) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$.

On dit que P est un polynôme annulateur de u si : $P(u) = \tilde{0}$.

1) Soient $A \in M_n(K)$ et $P \in K[X]$.

On dit que P est un polynôme annulateur de A si : $P(A) = \tilde{0}_n$.

Remarques :

1) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une base de E .

$P \in K[X]$ est un polynôme annulateur de u si et seulement si P est un polynôme annulateur de $\text{mat}(u, B)$.

2) Si A et B deux matrices semblables, alors P est un polynôme annulateur de $A \iff P$ est annulateur de B .

Exemples :

1) Soit p un projecteur de $E \iff p \circ p = p \iff p^2 - p = \tilde{0}$
D'où $Q(X) = X^2 - X$ est polynôme annulateur de p .

2) Soit S une symétrie de $E \iff S \circ S = \text{id}_E \iff S^2 - \text{id}_E = \tilde{0}$
D'où $Q(X) = X^2 - 1$ est un poly annulateur de S .

3) Soit h une homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^* \iff h = \lambda \text{id}_E \iff h - \lambda \text{id}_E = \tilde{0} \iff Q(X) = X - \lambda$ est un polynôme annulateur de h .

✿ Proposition

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$) et $P \in K[X]$.

Si P est un polynôme annulateur de u (resp. de A), alors

$$Sp(u) \subset \{\text{racines de } P\} \text{ (resp. } Sp(A) \subset \{\text{racines de } P\})$$

✿ Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

i) Si λ est une valeur propre de u , alors λ^k est une valeur propre de u^k , $\forall k \in \mathbb{N}$

ii) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

Si λ est une v.p. de u , alors $P(\lambda)$ est une v.p. de $P(u)$ et si x est un vecteur propre de u associé à λ , alors x est un vecteur propre de $P(u)$ associé à $P(\lambda)$

$$\iff E_\lambda(u) \subset E_{P(\lambda)}(P(u)).$$

Remarque :

La réciproque de la proposition précédente n'est pas toujours vraie : c'est à dire une racine du polynôme annulateur de u n'est pas nécessairement une valeur propre de u .

Exemple :

Soit $u = \text{id}_E$. λ est une v.p. de $u \iff \exists x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x \iff (1 - \lambda)x = 0$ d'où $\lambda = 1 \Rightarrow 1$ est la seule v.p. de $u = \text{id}_E$

$$\text{Soit } P(X) = X^2 - X$$

$P(u) = u^2 - u = \text{id}_E^2 - \text{id}_E = \tilde{0} \Rightarrow P$ est un poly annulateur de $u = \text{id}_E$ et les racines de P sont 0 et 1.

Expl : Projecteur

Soit P un projecteur de E tel que $P \neq \tilde{0}_E$ et $P \neq \text{id}_E$ alors $Sp(P) = \{0, 1\}$.

En effet

$$P \text{ projecteur} \iff P^2 = P \iff P^2 - P = \tilde{0}$$

$$\text{Soit } Q(X) = X^2 - X, \text{ alors } Q(P) = \tilde{0}$$

Si λ est une v.p. de P , alors λ est une racine de $Q \Rightarrow Sp(P) \subset \{0, 1\}$

* Mq 0 est une v.p. de P .

On a $p \neq \text{id}_E$ alors $\text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E) \neq E$

d'où $\text{Ker } p \neq \{0_E\} \iff \exists x \neq 0_E$ tel que $P(x) = 0 \Rightarrow 0$ est une v.p. de P

*Mq 1 est une v.p de P .

On a $P \neq \tilde{0} \Leftrightarrow \text{Im} P \neq 0_E \Leftrightarrow \text{Ker}(p - \text{Id}_E) \neq 0_E$

$\Leftrightarrow \exists y \neq 0_E$ tq $(p - \text{Id}_E)(y) = 0 \Leftrightarrow P(y) = y$
d'où 1 est une v.p de E . Ainsi, $\text{Sp}(p) = \{0, 1\}$

Exp 2 : Symétrie

Soit S une symétrie de E telle que $S \neq \text{Id}_E$ et $S \neq -\text{Id}_E$, $\text{Sp}(S) = \{-1, 1\}$.

Exp 3 : Endomorphisme nilpotent :

Soit $u \in \mathcal{L}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On dit que u est un endomorphisme nilpotent d'indice n si $u^n = \tilde{0}$ et $u^{n-1} \neq \tilde{0}$.

Si u est un endomorphisme nilpotent, alors $\text{Sp}(u) = \{0\}$

En effet

On a : $u^n = \tilde{0}$ et $u^{n-1} \neq \tilde{0}$ avec $Q(x) = X^n$

$\Leftrightarrow Q$ est un polynôme annulateur de u

$\Rightarrow \text{Sp}_K(u) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}$

$\Rightarrow \text{Sp}_K(u) \subset \{0\}$

• Mq 0 est une v.p de u

On a $u^{n-1} \neq \tilde{0} \Leftrightarrow \exists x \neq 0_E / u^{n-1}(x) \neq 0$

Or $u(u^{n-1}(x)) = u^n(x) = 0$

$\Rightarrow \exists y = u^{n-1}(x) \neq 0$ tel que $u(y) = 0$

$\Rightarrow 0$ est une v.p de u d'où $\text{Sp}(u) = \{0\}$

* Théorème de Cayley Hamilton

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u (resp. de A).

$$\chi_u(u) = \tilde{0} \quad (\text{resp. } \chi_A(A) = \tilde{0}_n).$$

* Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\begin{cases} \varphi \\ P \mapsto \varphi(P) = P(u) \end{cases} : IK[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$

• φ est un morphisme d'algèbres.

• Soit $\text{Im}(\varphi) = IK[u] = \{P(u), P \in IK[X]\}$, alors

$(IK[u], +, \cdot)$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

• $\text{ker}(\varphi) = \{P \in IK[X] \text{ tel que } P(u) = \tilde{0}\}$ est un idéal de $IK[X]$.

* Polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

• Il existe un unique polynôme unitaire π_u tel que $\text{ker}(\varphi) = \{P \in IK[X], \text{ tel que } P(u) = \tilde{0}\} = \pi_u IK[X]$.

• π_u est appelé polynôme minimal de u .

* Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

• Si Q est un polynôme annulateur de u , alors le polynôme minimal π_u divise Q .

• Le polynôme minimal π_u divise le polynôme caractéristique χ_u .

• Le polynôme minimal est l'unique polynôme unitaire annulateur de u et divise tout polynôme annulateur de u .

• Le polynôme minimal de u est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule u .

* Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

- 1) Les racines du polynôme minimal π_u sont les v.p. de u .
- 2) Le polynôme $\Pi_{\lambda \in \text{Sp}(u)}(X - \lambda)$ divise π_u .

* Théorème

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$)

On suppose que χ_u (resp χ_A) est scindé dans IK .

On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les v.p de u (resp. A) deux à deux distincts. Alors le polynôme caractéristique de u s'écrit sous la forme :

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

Le polynôme minimale π_u de u s'écrit sous la forme

$$\pi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\beta_k} \text{ avec } \beta_k \leq \alpha_k \quad \forall 1 \leq k \leq p.$$

Remarque :

La réciproque du résultat précédent n'est pas vraie en général : c'est à dire on peut avoir u_F diagonalisable sans que u le soit.

* Lemme de décomposition des noyaux

i) Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux et $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(K)$), alors

$$\text{Ker}(PQ(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)).$$

$$(\text{resp. } \text{Ker}(PQ(A)) = \text{Ker}(P(A)) \oplus \text{Ker}(Q(A)).$$

ii) Soient $P_1, \dots, P_n$ n -polynômes premiers entre eux deux à deux et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors

$$\text{Ker}\left(\prod_{i=1}^n P_i(u)\right) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(P_i(u)).$$

$$(\text{resp. } \text{Ker}\left(\prod_{i=1}^n P_i(A)\right) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(P_i(A))$$

* Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence suivante

i) u est diagonalisable

$\iff$

ii) Il existe $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de u scindé et à racines simples.

$\iff$

iii) Le polynôme minimal de u est scindé et à racines simples. Dans ce cas

$$\Pi_{\text{Ker}(u)}(X - \lambda)$$

* Lemme

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Soit $P \in IK[X]$ et F un sous espace stable par u , alors F un sous espace stable par $P(u)$ et on a :

$$(P(u))_F = P(u_F).$$

2) F un sous espace stable par u .

Si P est un polynôme annulateur de u , alors P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme induit u_F .

* Théorème

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous espace stable par u . alors

i) Le polynôme caractéristique χ_{u_F} divise χ_u .

ii) Le polynôme minimal Π_{u_F} divise Π_u .

iii) Si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable. iv) Si u est trigonalisable, alors u_F est trigonalisable.

✂ Proposition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé (u est trigonalisable) et s'écrit sous la forme

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

. Alors

a) $E = \bigoplus_{k=1}^p F_{\lambda_k}$ avec $F_{\lambda_k} = \ker(u - \lambda_k Id_E)^{\alpha_k}$.

b) $\forall 1 \leq k \leq p$, le sous espace F_{λ_k} est stable par u . On pose u_k l'endomorphisme induit par u à F_{λ_k} .

On pose $N_k = u_k - \lambda_k Id_{F_{\lambda_k}}$, alors

i) N_k est un endomorphisme nilpotent sur F_{λ_k}

ii) u_k est la somme d'un endomorphisme nilpotent et d'une homothétie $u_k = N_k + \lambda_k Id_{F_{\lambda_k}}$.

0

✂ Corollaire

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp de A $2a2 \neq$ et $m_i = \text{nul}(\lambda_i)$ $E_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i Id_n)$ alors les assertions suivants sont équivalentes.

i) A est diagonalisable

ii) P_A : le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$

iii) $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}$

iv) $n = \sum_{i=1}^n \dim E_{\lambda_i}$

✂ Corollaire

Soit $\in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in M_n(\mathbb{K})$)

Si P (resp. P_A) est scindé et à racine simple (P_u admet n valeurs propres 2 à 2 distincts), alors u (resp. A) est diagonalisable

Remarques :

1) La réciproque du corollaire précédent est fausse c'est à dire on peut avoir un endomorphisme ou une matrice diagonalisable mais le polynôme caractéristique n'est pas nécessairement à racines simples.

Id_E est diagonalisable et $P_{Id_E}(X) = (-1)^n (X - 1)^n$

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ si P_A n'est pas scindé dans $\mathbb{K}[X]$ alors A n'est pas diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$.

3) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

Si A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Mais la réciproque est fausse en général.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$IK[u] = \{P(u); P \in IK[X]\} \subset \mathcal{L}(E).$$

On suppose de dimension de E est finie et on pose

On suppose que le polynôme minimal de u , Π_u , est de degré d , alors $\dim(IK[u]) = d$.

$$P_A(X) = X^2 + 1$$

P_A n'est pas scindé dans $M_n(\mathbb{R})$. D'où A n'est pas diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.

- $P_A(X) = (x - i)(x + i)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et à racines simples.

D'où A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Proposition

Soit $A \in M_n(K)$. On suppose que A admet une seule v.p λ de multiplicité n . Alors A est diagonalisable ssi $A = \lambda I_n$.

Corollaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un s.e.v de E de $\dim \geq 1$ tel que F est stable par u . On note u_F l'endomorphisme de F induit par u alors :
Si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.

A Retenir

Soient E est un IK -e.v. de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les v.p de u à 2 à 2 distincts avec $\text{mul}(\lambda_k) = m_k$, $\forall 1 \leq k \leq p$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) u est diagonalisable

$\iff$

ii) Il existe une base B de E telle que $M(u, B)$ soit diagonale.

$\iff$

iii) Il existe une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de E formée de vecteurs propres de u .

$\iff$

iv) χ_u est scindé dans $K[X]$ et $\dim E_{\lambda_k}(u) = m_k \forall 1 \leq k \leq p$

$\iff$

$$v) E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$$

$\iff$

$$vi) \dim E = \sum_{i=1}^p \dim E_{\lambda_i}$$

$\iff$

vii) Le polynôme minimal de u , π_u est scindé et à racines simples.

$\iff$

viii) Il existe $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de u scindé et à racines simples.

Méthode de travail :

Détermination du polynôme caractéristique $\chi_u(X) = \det(XI_n - u)$



χ_u n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$

χ_u est scindé dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

$$P_u(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$$

u n'est pas diagonalisable



$\text{Sp}_K(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$



Déterminer $E_{\lambda_i}, \forall i \in \{1, \dots, p\}$



S'il $\exists i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que
 $\dim E_{\lambda_{i_0}} \neq \text{mul}(\lambda_{i_0})$



u n'est pas diagonalisable



u est diagonalisable

$$\Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}$$

Déterminer B_i une base de $E_{\lambda_i}, \forall i \in \{1, \dots, p\}$

$\Rightarrow B' = (B_1, \dots, B_p)$ est une base de E et $M(u, B')$ est diagonale