

Problème "Endomorphisme nilpotent"

Soit E un IK e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que f est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$ si $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Soit $\lambda \in IK$. on dit que λ est une valeur propre de f s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

Partie I

1. On considère

$$\varphi : IK^n \longrightarrow IK^n \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0(x_1), \dots, x_{n-1})$$

- a) Déterminer la matrice représentative de φ dans la base canonique de E .
 - b) déterminer une base de $\ker(\varphi)$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.
 - c) Montrer que φ est nilpotent d'indice n .
2. Dans cette question, on considère $E = IK_n[X]$ et

$$\psi : E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P(X+1) - P(X)$$

- a) Justifier que ψ est un endomorphisme de E .
- b) Soit $P \in E$, en discutant suivant le degré de P , déterminer celui de $\psi(P)$.
- c) Déterminer une base de $\text{Im}(\psi)$, puis $\ker(\psi)$.
- d) Montrer que ψ est nilpotent d'indice $n+1$.

Partie II

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p .

- a) Justifier l'existence d'un vecteur $x_0 \neq 0$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0_E$.
- b) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
- c) En déduire que $p \leq n$.

2. Montrer que si $h \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $h^2 = f$, alors $p \leq \frac{n+1}{2}$.

On suppose dans la suite que f un endomorphisme nilpotent d'indice $n = \dim E$. On note

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } g \circ f = f \circ g\}.$$

3. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un espace vectoriel.

4. Justifier que $B(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .

5. Montrer que

$$\mathcal{C}(f) = \{a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}, (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in IK^n\}.$$

(Ind : Pour $g \in \mathcal{C}(f)$, écrire $g(x_0)$ dans la base B .)

6. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(f)$ et en donner une base.

7. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^2 = Id_E + f$.

a) Justifier que $g \in \mathcal{C}(f)$.

b) En écrivant $g = a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$, montrer que $a_0^2 = 1$, $2a_0 a_1 = 1$ et $\sum_{i=0}^{k-1} a_i a_{k-i} = 0$, $\forall 2 \leq k \leq n-1$.

c) Dédire que $a_0 \in \{-1, 1\}$ et $\forall 1 \leq k \leq n-1$ a_k peut être exprimé de manière unique en fonction de a_0 .

d) Conclure qu'il y a exactement deux endomorphismes E de carré égale $Id_E + f$.