

Problème : Eléments propres d'une matrice.

On considère une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$.
Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus 0_{n,1}.$$

1. Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$.

a) Montrer que : $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|$.

b) Dédire que : $|\lambda| \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$.

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha, \beta) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

On admet que les valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ sont réelles.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha, \beta)$. Montrer que :

$$|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|.$$

3. Montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0, 1)$, il existe $\theta \in [0, \pi]$

telle que $\lambda = 2 \cos \theta$.

On note U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

4. Établir, pour $n \geq 3$

$$\chi_{A_n(0,1)}(X) = X \cdot \chi_{A_{n-1}(0,1)}(X) - \chi_{A_{n-2}(0,1)}(X).$$

5. Montrer que pour tout n et pour tout $\theta \in]0, \pi[$:

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

6.a) Dédire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0, 1)$ est donné par $\{\lambda_j = 2 \cos \frac{j\pi}{n+1}, \text{ pour } j \in \{1, \dots, n\}\}$.

b) Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous espaces propres associés.

Considérons $j \in \{1, \dots, n\}$ et posons $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1}$.

7. Montrer que pour tout vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ associé à la

valeur propre λ_j , on a :

$$\begin{aligned} -2 \cos(\theta_j) x_1 + x_2 &= 0, \\ x_{k-1} - 2 \cos(\theta_j) x_k + x_{k+1} &= 0, \quad \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \\ x_{n-1} - 2 \cos(\theta_j) x_n &= 0. \end{aligned}$$

8. Déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$ et vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k-1} - 2 \cos(\theta_j) u_k + u_{k+1} = 0.$$

9. En déduire l'espace propre de $A_n(0, 1)$ associé à la valeur propre λ_j .
10. En déduire, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha, \beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.