

Problème "Commutant d'un endomorphisme"

Partie I.

On considère dans tout le problème E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) avec $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme non nul de E . On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi_u : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\mapsto \varphi_u(v) = uv - vu \end{aligned}$$

(La notation $uv = u \circ v$)

Partie I

- 1) a) Vérifier que φ_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$. φ_u est-il un automorphisme ?
b) Vérifier que $\ker(\varphi_u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
- 2) On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $Sp(u) = \emptyset$.
a) Montrer que tout sous-espace vectoriel de E stable par u est de dimension paire.
b) Dédire que si $v \in \ker(\varphi_u)$, alors $\ker v$ est de dimension paire.
- 3) On suppose dans cette question que u est un endomorphisme nilpotent.
a) Montrer que $\ker(u) \neq \{0\}$.
b) Soit $v \in \ker(\varphi_u)$ tel que v est nilpotent. Montrer que $\ker(u) \cap \ker(v) \neq \{0\}$.
- 4) On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Soit $v \in \ker(\varphi_u)$, montrer que u et v ont un vecteur propre commun.
- 5) Supposons que u est nilpotent d'indice n .
a) Montrer qu'il existe $a \in E \setminus \{0\}$ tel que la famille $\mathcal{B} = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit une base de E .
b) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} h : \ker(\varphi_u) &\rightarrow E \\ g &\mapsto g(a) \end{aligned}$$

est linéaire et injective.

- c) Dédire que $\dim \ker(\varphi_u) = n$ et que $\mathcal{B}' = (\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est une base de $\ker(\varphi_u)$.
- d) Montrer que $v \in \ker(\varphi_u)$ si et seulement si il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Partie II

- 1) On suppose que $Sp(u) \neq \emptyset$.
Montrer que si $v \in \ker(\varphi_u)$, alors tout sous-espace propre de u est stable par v .
- 2) On suppose que u admet n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes et on considère $v \in \ker(\varphi_u)$.
i) Vérifier que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(u)$.
ii) Dédire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u et celle de v sont diagonales.

- 3) On suppose que u est diagonalisable et que $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$) sont les valeurs propres de u deux à deux distinctes. On pose $\dim(E_{\lambda_i}(u)) = n_i$.
- a) Soit $v \in \ker(\varphi_u)$, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de v est diagonale par blocs, sous la forme :

$$M(v, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix} \quad \text{où } A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C}).$$

- b) On considère $v \in \ker(\varphi_u)$ telle que v soit diagonalisable.
- i) On note v_i l'endomorphisme induit par v à $E_{\lambda_i}(u)$. Vérifier que v_i est diagonalisable.
- ii) Dédire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u et celle de v sont diagonales.
- 4) Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$\begin{aligned} \psi_u : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\mapsto \psi_u(v) = uv \end{aligned}$$

- a) Montrer que ψ_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
- b) i) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, x un vecteur propre de u associée à λ et H un supplémentaire de $\text{vect}(x)$ dans E . En considérant p la projection sur $\text{vect}(x)$ et parallèlement à H , montrer que $\lambda \in \text{Sp}(\psi_u)$.
- ii) Dédire que $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(\psi_u)$.
- c) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, montrer que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $Q(\psi_u)(v) = Q(u)(v)$.
- d) Dédire que u est diagonalisable si et seulement si ψ_u est diagonalisable.