

Devoir à la maison "Bien réviser notre cours"

Dans tout le devoir, on considère E un IK -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$

Exercice

Montrer les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) u est diagonalisable,
- (b) E admet une base formée de vecteurs propres de u ,
- (c) $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$,
- (d) $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_{\lambda}(u))$,
- (e) χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \dim(E_{\lambda}(u)) = m_{\lambda}(u)$.

Problème .**Partie I.**

Le but de cette partie est de montrer le théorème de Cayley-Hamilton".

- Soit F un sous espace vectoriel de E stable par U et U_F l'endomorphisme induit par U sur F .
Montrer que χ_{U_F} divise χ_U
- Soit x un vecteur de E non nul. Montrer l'existence d'un entier $p \leq n$ tel que
 $(x, U(x), \dots, U^{p-1}(x))$ est une famille libre de E
et $U^p(x) \in F_x = \text{vect}(x, U(x), \dots, U^{p-1}(x))$.
- Déduire que F_x est stable par U

4. On note $\tilde{U}$ l'endomorphisme induit par U sur F_x .

a) Calculer $\chi_{\tilde{U}}$.

b) En déduire que $\chi_U(U)(x) = 0$ puis $\chi_U(U) = \tilde{0}$

Partie II On pose $I_u = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0\}$.

- Montrer que I_u est un idéal de $K[X]$ non réduit à $\{0_{K[X]}\}$.
- Déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire, noté π_u , tel que $I_u = \pi_u K[X]$. (Ce polynôme est appelé le *polynôme minimal* de u).
- Montrer que $\text{Sp}(u) = \{\text{racines de } \pi_u \text{ dans } K\}$.
- Soit F un sous espace vectoriel de E stable par u , montrer que le polynôme minimal de u_F divise celui de u .

Partie III

1. Soit P et Q deux polynômes dans $K[X]$.

Montrer que si D est le pgcd de p et Q , alors

$$\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \ker D(u).$$

2. a) Montrer que $\ker P(u) + \ker Q(u) \subset \ker PQ(u)$.

b) Déduire que si P et Q sont premiers entre eux, alors

$$\ker P(u) \oplus \ker Q(u) = \ker PQ(u).$$

3. Déduire le lemme de décomposition des noyaux : pour tout $n \geq 2$, si $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux, alors :

$$\ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus \dots \oplus \ker P_n(u) = \ker \left(\prod_{i=1}^n P_i \right)(u).$$

4. Montrer que si q est un projecteur de E , alors $\ker q \oplus \text{Im } q = E$.

5. Soit λ une valeur propre de u de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il existe un sous espace vectoriel G stable par u tel que

$$E = \ker((u - \lambda \text{Id}_E)^m) \oplus G.$$

6. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a) u est diagonalisable,
- (b) Il existe $P \in K[X]$, scindé à racines simples, annulateur de u ,
- (c) π_u est scindé à racines simples.

7. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que son polynôme caractéristique est scindé de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$:

(a) Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$, où $E_i = \ker((u - \lambda_i \text{Id}_E)^{m_i})$.

(b) Montrer que $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, E_i est stable par u . Notons u_i l'endomorphisme de E_i induit par u .

(c) Montrer $\forall i \in \{1, \dots, r\}$, $u_i = \lambda_i \text{Id}_{E_i} + n_i$, où n_i est un endomorphisme nilpotent de E_i .