

Matrices Compagnons et endomorphismes cycliques

Dans tout le problème IK désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un IK -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et f un endomorphisme sur E .

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \dots + a_0$ un polynôme unitaire de $IK[X]$, on lui associe la matrice compagnon $C_p \in M_n(IK)$, donnée par :

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -a_{n-1} \end{matrix}$$

Partie I

1. Montrer que C_p est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.
2. Montrer que le polynôme caractéristique de C_p est égale à P .
3. Soit Q un polynôme de $IK[X]$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice $A \in M_n(IK)$ tel que le polynôme caractéristique de A , $\chi_A = Q$.
4. On note ${}^tC_p$ la matrice transposée de C_p .
 - a) Justifier que $Sp_{IK}({}^tC_p) = Sp_{IK}(C_p)$.
 - b) Soit $\lambda \in Sp_{IK}({}^tC_p)$, déterminer le sous espace propre de ${}^tC_p$ associée à la valeur propre λ .
 - c) Montrer que C_p est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur IK et toutes ses racines sont simples.
 - d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distincts. Montrer que ${}^tC_p$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde $V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ suivant est non nul :

$$V(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Partie II " Endomorphisme de nilpotent "

On suppose dans cette partie que f est un endomorphisme de E nilpotent d'indice p ($f^{p-1} \neq \tilde{0}$ et $f^p = \tilde{0}$). Pour $1 \leq k \leq p$, on pose $N_k = \ker f^k$, $n_k = \dim N_k$ et on suppose que $n_1 = 1$.

1. Montrer que $\forall 0 \leq k \leq p-1$, $N_k \subset N_{k+1}$ et que $f(N_{k+1}) \subset N_k$.
2. En considérant l'application $\varphi: N_{k+1} \rightarrow N_k$, $x \mapsto f(x)$, montrer que $n_{k+1} \leq 1 + n_k$.
3. a) Montrer que s'il existe k ($0 \leq k \leq p-1$), tel que $N_k = N_{k+1}$ ($\ker f^k = \ker f^{k+1}$), alors $N_j = N_k, \forall j \geq k+1$.
b) En déduire que $n_k = k \forall k \in \{0, \dots, p-1\}$ et que $n = p$.

Partie III "Caractérisation des endomorphismes cycliques"

On dit que f est un endomorphisme cyclique, s'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

1. Montrer que f est cyclique si et seulement si, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ et une base de E dans laquelle la matrice de f est C_P .
2. Montrer que si f est cyclique, alors la famille $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

On suppose dans la suite de cette partie que la famille $(I, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et on se propose de montrer que f est cyclique.

3. Dans cette question, on suppose que $IK = \mathbb{C}$ et on factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les valeurs propres de f deux à deux distincts. Pour $1 \leq k \leq p$, on pose $F_k = \ker(f - \lambda_k I_E)^{m_k}$.

- a) Montrer que F_k est stable par f et que $\bigoplus_{k=1}^p F_k = E$.

Pour $1 \leq k \leq p$, on pose

$$\begin{aligned} \varphi_k: F_k &\rightarrow F_k \\ x &\mapsto \varphi_k(x) = f(x) - \lambda_k x \end{aligned}$$

- b) i) Montrer que $\varphi_k^{m_k} = \tilde{0}$ et que $\varphi_k^{m_k-1} \neq \tilde{0}$.
ii) Montrer que $\dim F_k = m_k$.
c) i) Montrer que si g est un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $r \in \mathbb{N}^*$ sur un espace G avec $\dim(G) = r$, alors il existe une base de G dans laquelle la matrice de g est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) En déduire qu'il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par bloc de la forme

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_p \end{pmatrix} \text{ avec } J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{m_k}$$

d) En utilisant la matrice compagnon de χ_f , montrer que f est cyclique.

Partie IV

Pour f un endomorphisme de E , On note $IK[f] = \{P(f) \mid P \in IK[X]\}$ et $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f .

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E); f \circ g = g \circ f\}.$$

On admet que $\dim \mathcal{C}(f) \geq n$.

- On considère f un endomorphisme cyclique et on choisit $x_0 \in E$ tel que $B = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .
a) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$, montrer que $g \in IK[f]$.
(Ind : Ecrire $g(x_0)$ dans la base B .
b) Montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si, et seulement si, il existe un polynôme $R \in IK_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.
- Montrer que si $\mathcal{C}(f) = IK[f]$, alors f est cyclique.
- Déduire que f est cyclique si et seulement si $\mathcal{C}(f) = IK[f]$.

Partie VI "Cycles"

On suppose dans cette partie que $IK = \mathbb{C}$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que f est un p -cycle s'il existe $x_0 \in E$ tel que

$$\begin{cases} \text{la famille } (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ soit génératrice de } E \\ f^p(x_0) = x_0 \end{cases}$$

Dans cette partie on suppose que f est un p -cycle.

- Montrer que $f^p = Id_E$.
- Soit $H = \{k \in \mathbb{N}^*, \text{ tel que } (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ soit une famille libre}\}$. Justifier que H admet un maximum noté m .
- a) Montrer que $\forall k \geq m, f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.
b) En déduire que f est cyclique.
- On suppose que f est un n -cycle
a) Déterminer C_f matrice compagne de f .
b) Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base de E dans laquelle f est diagonale.