

Commutant d'un endomorphisme

$$0 \neq U \in \mathcal{L}(E)$$

$$\varphi_U: \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

$$v \mapsto \varphi_U(v) = UV - vU.$$

Partie I

1) a) soient $U, W \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \varphi_U(\lambda U + W) &= U(\lambda U + W) - (\lambda U + W)U \\ &= \lambda(UU - UU) + UW - WU \\ &= \lambda \varphi_U(U) - \varphi_U(W) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi_U$ est linéaire.

$$\forall V \in \mathcal{L}(E); \varphi_U(V) = UV - VU \in \mathcal{L}(E).$$

D'où φ_U est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

* On remarque que $U \neq 0$ et $\varphi_U(U) = 0$.

$$\Rightarrow \ker \varphi_U \neq \{0\} \Leftrightarrow \varphi_U \text{ n'est pas injective.}$$

D'où φ_U n'est pas bijective.

φ_U n'est pas un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

Rappel

$$f: E \longrightarrow E.$$

* On dit que f est un endomorphisme.

si f est linéaire de E dans E .

* On dit que f est automorphisme.

si f est un endomorphisme bijectif.

b) $\Pi \varphi \ker \varphi_U$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

$$\bullet \ker \varphi_U \subset \mathcal{L}(E)$$

$$\bullet 0 \in \ker \varphi_U$$

$\bullet \ker \varphi_U$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

$\bullet$ Soient $v \in \ker \varphi_U$ et $w \in \ker \varphi_U$.

$$\Pi \varphi v, w \in \ker \varphi_U.$$

$$\text{On a } v \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow UV = vU$$

$$w \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow wU = Uw.$$

$$\Rightarrow v, w, U = vUw = vUw = vU \cdot w.$$

$$\Rightarrow v \cdot w \in \ker \varphi_U$$

$\Leftrightarrow \ker \varphi_U$ est une Λ -algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

$$2) \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ et } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(U) = \emptyset.$$

a) Soit F un Λ -e.v. de E stable par U .

$$\bullet \text{ Si } F = \{0\} \Rightarrow \dim F = 0 \text{ pair.}$$

$$\bullet \text{ Si } F \neq \{0\}.$$

Puisque F est stable par U , on considère

$$U_F: F \longrightarrow F \text{ l'endomorphisme induit par } U \text{ sur } F.$$

Supposons que $\dim F$ est impair
alors $\deg \chi_{U_F} = \dim F$ est impair

$X_{UF} \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg X_{UF}$ est impair
 Alors X_{UF} admet au moins une racine
réelle
 $\Leftrightarrow \text{SPR}(UF) \neq \emptyset$
 Comme $\text{SPR}(UF) \subset \text{SPR}(U)$, on
 déduit $\text{SPR}(U) \neq \emptyset$ ce qui est
 absurde.

Ainsi $\dim F$ est pair
 b) soit $v \in \ker U \Leftrightarrow Uv = vU$
 D'où $\ker v$ est stable par U .
 D'après a) on déduit que $\dim \ker v$ est
 pair.

3) a) On suppose que U est nilpotent.
 d'indice $p \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow U^p = \tilde{0}$ et $U^{p-1} \neq \tilde{0}$.
 • Puisque $U^{p-1} \neq \tilde{0} \Rightarrow \exists a \in E$ tq.
 $U^{p-1}(a) \neq 0$.
 • or $U^p = \tilde{0} \Rightarrow U(U^{p-1}(a)) = U^p(a) = 0$
 $\Rightarrow 0 \neq U^{p-1}(a) \in \ker U$
 $\Rightarrow \underline{\ker U \neq \{0_E\}}$

b) soit $v \in \ker(\varphi_U)$ tq v nilpotent
 tq $\ker U \cap \ker v \neq \{0\}$

Puisque $v \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow Uv = vU$
 $\Rightarrow \ker v$ est stable par v .
 On pose $\tilde{v} : \ker v \rightarrow \ker v$ l'endo
 induit par v sur $\ker v$.
 Comme v est nilpotent, alors $\tilde{v}$ est
 aussi nilpotent.
 D'après a) $\ker \tilde{v} \neq \{0\}$
 or $\ker \tilde{v} = \ker v \cap \ker v$
 $\Rightarrow \underline{\ker U \cap \ker v \neq \{0\}}$.

4) a) nilpotent d'indice n .
 D'après 3a) $\exists a \in E$ tq. $U^n(a) = 0$
 et $U^{n-1}(a) \neq 0$.
 • Puisque $\dim E = n$, il suffit de
 mq. la famille $B = (a, U(a), \dots, U^{n-1}(a))$
 est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq.
 $\bigoplus_{k=0}^{n-1} \alpha_k U^k(a) = 0$, mq $\alpha_k = 0, \forall k \leq n-1$.
 Supposons qu'il existe $i_0 \in \{0, \dots, n-1\}$ tq
 $\alpha_{i_0} \neq 0$. Alors l'ensemble
 $A = \{i \in \{0, \dots, n-1\}; \alpha_i \neq 0\}$ est un
 ensemble non vide de $\mathbb{N}$ et par suite
 admet un plus petit élément noté p .

$$p = \min A = \min \{i \in \{0, \dots, n-1; \alpha_i \neq 0\}\}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall \quad i \leq p-1 \quad \text{et} \quad \alpha_p \neq 0$$

Ainsi: $\textcircled{*} \Leftrightarrow \sum_{k=p}^{n-1} \alpha_k U^k (a) = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha_p U^p (a) + \alpha_{p+1} U^{p+1} (a) + \dots + \alpha_{n-1} U^{n-1} (a) = 0$$

On applique U^{n-p-1} , on obtient:

$$\alpha_p \underbrace{U^{n+1} (a)}_{=0} + \alpha_{p+1} \underbrace{U^n (a)}_{=0} + \dots + \alpha_{n-1} \underbrace{U^{2n-p-1} (a)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_p = 0$ ce qui est absurde.

Ainsi, $\forall \quad 0 \leq i \leq n-1; \alpha_i = 0$

$\Rightarrow$ la famille $B = (a; U(a), \dots, U^{n-1}(a))$ est libre. $\Rightarrow B$ base de E .

b) $h: \ker \varphi_U \rightarrow E$
 $g \mapsto h(g) = g(a)$

Soient g et $f \in \ker \varphi_U$ et $\lambda \in K$.

$$h(\lambda g + f) = \lambda(g+f)(a) = \lambda g(a) + f(a)$$

$$= \lambda h(g) + h(f)$$

$\Rightarrow h$ est linéaire.

* π_g est injective.

soit $g \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow Ug = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g \in \ker \varphi_U \\ \text{et } h(g) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{et } gU = Ug \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

soit $0 \leq k \leq n-1$.

Puisque g et U commutent, alors g et U^k commutent.

$$\Rightarrow g(U^k(a)) = U^k(g(a)) = 0$$

Comme $B = (a, U(a), \dots, U^{n-1}(a))$ est une base de E , alors $g = \tilde{0}$.

Ainsi $\ker h = \{\tilde{0}\} \Leftrightarrow h$ est injective

Remarque.

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$

$$\rightarrow f = \tilde{0} \Leftrightarrow f(e_k) = 0 \quad \forall \quad 1 \leq k \leq n.$$

car $\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k f(e_k) = 0$$

$$\rightarrow f = g \Leftrightarrow f(e_k) = g(e_k); \quad \forall \quad 1 \leq k \leq n$$

$\rightarrow$ On peut remplacer la base B par une famille génératrice de E .

c) Soit $0 \leq k \leq n-1$; on a $\varphi_U(U^k) = 0$

$$\Rightarrow U^k \in \ker \varphi_U$$

* π_g la famille $(Id_E, U, \dots, U^{n-1})$ est libre

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k U^k = \tilde{0}.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k U^k(a) = 0 \Rightarrow \alpha_k = 0, \forall 0 \leq k \leq n-1$$

car $(a, U(a), \dots, U^{n-1}(a))$ est libre.

Ainsi la famille $(Id_E, U, \dots, U^{n-1})$ est libre dans $\ker \varphi_U$

Ce qui montre que $\dim \ker \varphi_U \geq n$ ①

D'autre part on a h est injective.

$$\Rightarrow \dim \ker \varphi_U = \dim \ker h + \dim(\operatorname{Im} h)$$

$$= \dim(\operatorname{Im} h) \leq \dim E$$

$$\Rightarrow \dim \ker \varphi_U \leq n \quad \text{②}$$

$$\xRightarrow{1+2} \dim \ker \varphi_U = n$$

Et par suite $(Id_E, U, \dots, U^{n-1})$ est une base de $\ker \varphi_U$

d) Puisque $(Id_E, U, \dots, U^{n-1})$ est une base de $\ker \varphi_U$; alors $\forall v \in \ker \varphi_U$

$$\exists \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K} \text{ tq } v = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k U^k$$

$$\Rightarrow v = P(U) \text{ où } P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$$

Partie II

$$U \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(U) \neq \emptyset$$

si $v \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow Uv$ et v commutent $\Leftrightarrow$ les sous-espaces propres de U sont stables par v .

e) U admet n.v.p $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\lambda_i \neq \lambda_j$.

i) Puisque $\dim E = n$ et U admet n.v.p λ_i $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors U est diagonalisable

$$\Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}$$

$$ii) v \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow U \cdot v = v \cdot U$$

$$\text{On a } E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}$$

$$\dim E_{\lambda_i} = 1 \quad (\lambda_i \text{ v.p. simple})$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_i} = \operatorname{vect}(e_i)$$

$\Rightarrow B' = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée des vecteurs propres de $U \Leftrightarrow$

$$M(U, B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D'autre part, E_{λ_i} est stable par v ($\forall 1 \leq i \leq n$)

$$\Rightarrow v(e_i) \in E_{\lambda_i} = \operatorname{vect}(e_i)$$

$$\Rightarrow \exists \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ tq } v(e_i) = \alpha_i e_i$$

$$\Rightarrow M(v, B') = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

U est diagonalisable avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$
 les $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \dim E_{\lambda_i}^{(U)} = n_i$.

a) $v \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow Uv = vU$
 On a. U est diagonalisable, d'où :

$$E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}$$

On considère $B = (B_1, B_2, \dots, B_p)$ une base de E adaptée à cette décomposition
 (B_k : base de E_{λ_k} et card. $B_k = \dim E_{\lambda_k}^{(U)} = n_k$)

Comme U et v commutent, alors $E_{\lambda_k}^{(U)}$ est stable par $v \Rightarrow v(E_k) \subset E_k$
 pour tout $x \in B_k$, on a $v(x) \in E_k$

$$\Rightarrow \pi(v, B) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_p \end{pmatrix}$$

B_1
 B_2
 B_p

b) $v \in \ker \varphi_U$ $\Leftrightarrow v$ est diagonalisable.
 i) $v \in \ker \varphi_U \Leftrightarrow Uv = vU$
 $\Rightarrow E_{\lambda_i}^{(U)}$ est stable par v .

On pose $v_i : E_{\lambda_i}^{(U)} \rightarrow E_{\lambda_i}^{(U)}$
 l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}^{(U)}$

On a. v est diagonalisable, alors
 $\exists Q \in K[X]$ un polynôme annulateur de v scindé à racines simples

$Q(v) = 0 \Rightarrow Q(v_i) = 0$
 d'où v_i est diagonalisable.

ii) On a. U est diagonalisable $\Leftrightarrow$

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(U)$$

Comme v est diagonalisable et $E_{\lambda_i}(U)$ est stable par v , alors d'après i)

$v_i = v|_{E_{\lambda_i}(U)}$ est diagonalisable

$\Rightarrow \exists B'_i$ une base de $E_{\lambda_i}(U)$ tq.

$\pi(v_i, B'_i)$ est diagonale.

On pose $B' = (B'_1, B'_2, \dots, B'_p)$ base de E .

$$\pi(v, B') = \begin{pmatrix} \pi(v_1, B'_1) & & \\ & \pi(v_2, B'_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} \pi(v_1, B'_1) = D_1 \\ \pi(v_2, B'_2) = D_2 \\ \vdots \end{array} \right.$$

= diagonale.

D'autre part, B'_i base de $E_{\lambda_i}(U) \Rightarrow$
 forment des vecteurs propres de U

$\Rightarrow \pi(U, B)$ est diagonale

c) $K = \mathbb{C}$.
 $\mathcal{V} = \ker \varphi_U \Leftrightarrow U \mathcal{V} = \mathcal{V} \cdot U$
 On a $K = \mathbb{C} \Rightarrow S_{P_K}(U) \neq \emptyset$
 Soit $\lambda, \mathcal{V}_\lambda$ de $U \Rightarrow E_\lambda(U) = \ker(U - \lambda Id)$
 est stable par $\mathcal{V}$.
 L'endomorphisme $\tilde{\mathcal{V}}: \mathcal{V}|_{E_\lambda(U)}: E_\lambda(U) \rightarrow E_\lambda(U)$
 admet une $\mathcal{V}_\lambda, \mu$.
 $\Rightarrow \exists x \neq 0; x \in E_\lambda(U) \text{ tq } \tilde{\mathcal{V}}(x) = \mu x$
 $\Rightarrow \mathcal{V}(x) = \lambda x$
 or $x \in E_\lambda(U) \Rightarrow U(x) = \lambda x$.
 $\Rightarrow x$ vecteur propre commun.

4) $U \in \mathcal{L}(U): \varphi_U, \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$
 $\mathcal{V} \mapsto U \mathcal{V}$.

a) φ_U est linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$
 $\Leftrightarrow \varphi_U$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$

b) i) $\lambda \in S_{P_K}(U); U(x) = \lambda x$.
 $H \oplus \text{Vect}(x) = E$.

Soit p un projecteur sur $\text{Vect}(x)$ // à H .
 $\forall y \in E$
 $\varphi_U(p)(y) = U(p(y)) = U(\alpha x)$
 $= \alpha U(x) = \alpha \lambda x$ car $p(y) \in \text{Vect}(x)$
 $= \lambda(p(y))$

$\Rightarrow \varphi_U(p) = \lambda p \Rightarrow \lambda \in S_{P_K}(\varphi_U)$

ii) D'après i) $S_{P_K}(U) \subset S_{P_K}(\varphi_U)$
 "D" soit $\lambda \in S_{P_K}(\varphi_U) \Leftrightarrow \exists \mathcal{V} \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \varphi_U(\mathcal{V}) = \lambda \mathcal{V}$
 $\Leftrightarrow U \mathcal{V} = \lambda \mathcal{V} \Leftrightarrow U \mathcal{V}(x) = \lambda \mathcal{V}(x), \forall x$
 Comme $\mathcal{V} \neq 0 \Rightarrow \exists x_0 \in E \text{ tq } \mathcal{V}(x_0) \neq 0$
 $U(\mathcal{V}(x_0)) = \lambda \mathcal{V}(x_0)$
 $\Rightarrow \lambda \mathcal{V} \cdot p$ de $U \Rightarrow S_{P_K}(\varphi_U) \subset S_{P_K}(U)$
 Ainsi: $S_{P_K}(\varphi_U) = S_{P_K}(U)$

c) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]; Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$\Rightarrow Q(\varphi_U)(\mathcal{V}) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_U^k(\mathcal{V})$

or $\varphi_U(\mathcal{V}) = U \mathcal{V} \Rightarrow \varphi_U^2(\mathcal{V}) = \varphi_U(\varphi_U(\mathcal{V}))$
 $= \varphi_U(U \mathcal{V})$
 $= U(\varphi_U(\mathcal{V})) = U^2 \mathcal{V}$

On vérifie par récurrence que $\varphi_U^k(\mathcal{V}) = U^k \mathcal{V}$

$\Rightarrow Q(\varphi_U)(\mathcal{V}) = \sum_{k=0}^n a_k U^k \mathcal{V} = Q(U)(\mathcal{V})$

d) φ_U est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists Q$ poly
 annulateur de φ_U scinde et à racines simples.
 $\Leftrightarrow Q$ annulateur de U
 $\Leftrightarrow U$ est diagonalisable