

Correction "Endomorphisme nilpotent"

Partie I

1) $\varphi: K^n \longrightarrow K^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_n) = (0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

a) $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n

• $\varphi(e_1) = \varphi(1, 0, \dots, 0) = (0, 1, 0, \dots, 0) = e_2$

• $\forall 1 \leq k \leq n-1; \varphi(e_k) = e_{k+1}$

• $\varphi(e_n) = \varphi(0, \dots, 0, 1) = (0, \dots, 0)$

Alors $M(\varphi, B) = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_{n-1}) & \varphi(e_n) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

b) $x \in \ker \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} x \in K^n \\ \varphi(x) = 0 = (0, \dots, 0) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (0, \dots, 0)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = (0, \dots, 0, x_n) = x_n \cdot e_n$$

ou $\boxed{\ker \varphi = \text{vect}(e_n)}$

* $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de K^n

$$\text{Im } \varphi = \text{vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

$$= \text{vect}(e_2, e_3, \dots, e_n, 0)$$

$$\text{Im } \varphi = \text{vect}(e_2, e_3, \dots, e_n)$$

Puisque $(e_2, e_3, \dots, e_n)$ est une sous famille d'une famille libre, elle est libre.

Alors $(e_2, e_3, \dots, e_n)$ est une base de

$$\text{Im } \varphi$$

erc méthode

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$\varphi^2(x) = \varphi(0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (0, 0, x_1, \dots, x_{n-2})$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{n-1}(x) = (0, \dots, 0, x_1)$$

$$\varphi^n(x) = (0, \dots, 0) \quad \forall x \in K^n$$

Alors $\varphi^n = \tilde{0}$

De plus $\varphi^{n-1}(1, 0, \dots, 0) = (0, \dots, 0, 1) \neq 0$

$$\Rightarrow \varphi^{n-1} \neq \tilde{0}$$

Ce qui montre que φ est nilpotent d'indice n .

2^{ème} méthode.

$$\text{On a } \text{Im } \varphi = \text{vect}(e_2, \dots, e_n) \\ \Rightarrow \text{Im } \varphi^2 = \text{vect}(\varphi(e_2), \dots, \varphi(e_{n-1}), \underbrace{\varphi(e_n)}_{=0}) \\ = \text{vect}(e_3, \dots, e_n)$$

$$\text{Im } \varphi^k = \text{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$$

$$\text{Im } \varphi^{n-1} = \text{vect}(e_n)$$

$$\Rightarrow \varphi^{n-1} \neq \tilde{0}$$

$$\text{et } \text{Im } \varphi^n = \text{vect}(\underbrace{\varphi(e_n)}_{=0}) = \tilde{0}$$

$$\Leftrightarrow \varphi^n = \tilde{0}$$

2) $E = K_n[X]$
 $\varphi: E \rightarrow E$

$$P \mapsto P(x+1) - P(x)$$

a) Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\alpha \in K$.

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P_1 + P_2) &= \alpha(P_1(x+1) - P_1(x)) + P_2(x+1) - P_2(x) \\ &= \alpha \varphi(P_1) + \varphi(P_2) \end{aligned}$$

D'où φ est linéaire.

On a $X \mapsto P(x+1) \in K_n[X]$
et $X \mapsto P(x) \in K_n[X]$

Alors le polynôme $X \mapsto \varphi(X) = P(x+1) - P(x) \in K_n$

D'où $\varphi(P) \in E$

$\Rightarrow \varphi$ est un endomorphisme de E .

b) Soit $P \in E$ tel que $\deg P = k \leq n$.

Si $k \geq 1$
 $\Leftrightarrow P(x) = a_k x^k + H(x)$ avec $\deg H \leq k-1$ et $a_k \neq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(P) &= a_k((x+1)^k - x^k) + H(x+1) - H(x) \\ &= a_k \left(\sum_{i=0}^k C_k^i x^i - x^k \right) + H(x+1) - H(x) \\ &= a_k \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_k^i x^i \right) + H(x+1) - H(x) \\ &= a_k \cdot C_k^{k-1} x^{k-1} + a_k \sum_{i=0}^{k-2} C_k^i x^i + H(x+1) - H(x) \end{aligned}$$

Or $a_k \neq 0 \Rightarrow C_k^{k-1} a_k = k a_k \neq 0$

De plus $\deg(H(x+1) - H(x)) \leq k-2$

Alors $\deg \varphi(P) = k-1$

Si $k = 0$ ou $P = \tilde{0}$

Alors $P(x) = a = 0$

$\Rightarrow \varphi(P) = \tilde{0} \Rightarrow \deg \varphi(P) = -\infty$

$\Leftrightarrow B = (1, X, \dots, X^n)$ base de $E = K_n[X]$

$\varphi(1) = 0; \quad \varphi(X) = 1$

$\forall 2 \leq k \leq n; \quad \varphi(X^k) = (X+1)^k - X^k$

$$\psi(x^k) = \sum_{p=0}^k C_k^p x^p - x^k$$

$$= \sum_{p=0}^{k-1} C_k^p x^p$$

$$\text{Im } \psi = \text{vect}(\psi(1), \psi(x), \psi(x^2), \dots, \psi(x^n))$$

$$= \text{vect}(0, 1, 2x+1, \dots, \sum_{p=0}^{n-1} C_k^p x^p)$$

$$\text{Im } \psi = \text{vect}(1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$$

puisque $(1, x, \dots, x^{n-1})$ libre

Alors $(1, x, \dots, x^{n-1})$ est une base de $\text{Im } \psi$.

$$\ast \text{ soit } p \in \ker \psi \Leftrightarrow \psi(p) = 0$$

$$\Leftrightarrow p(x+1) = p(x)$$

On vérifie par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p(x+n) = p(x)$$

$$\text{Alors } p(n) = p(0), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On pose } Q(x) = p(x) - p(0)$$

$$Q(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Q \text{ admet une infinité de racines} \Rightarrow Q = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = p(0) = \text{cte.}$$

$$\ker \psi \subset \mathbb{R}$$

$$\text{de plus si } p = \text{cte} \Rightarrow \psi(p) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \subset \ker \psi \Rightarrow \boxed{\ker \psi = \mathbb{R}}$$

$$\text{d) } \text{Im } \psi = \text{vect}(1, x, \dots, x^{n-1})$$

$$\Rightarrow \text{Im } \psi^2 = \text{vect}(1, x, \dots, x^{n-2})$$

$$\text{Im } \psi^n = \text{vect}(1)$$

$$\text{Im } \psi^{n+1} = \text{vect}(0)$$

$$\Rightarrow \psi^n \neq 0 \text{ et } \psi^{n+1} = 0$$

$\Rightarrow \psi$ est nilpotent d'indice $n+1$

Partie II

$$1) \text{ a) } f \text{ nilpotent d'indice } p \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow f^{p-1} \neq 0 \text{ et } f^p = 0$$

Puisque $f^{p-1} \neq 0$, alors il existe $x_0 \neq 0$

$$\text{t.q. } f^{p-1}(x_0) \neq 0$$

$$\text{Puisque } f^p = 0, \text{ alors } f^p(x_0) = 0$$

$$\text{b) t.q. la famille } (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) \text{ est}$$

libre

$$\text{On a. } f^{p-1}(x_0) \neq 0, \text{ alors } \forall 0 \leq k \leq p-1, f^k(x_0) \neq 0$$

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ des éléments de $\mathbb{K}$.

$$\ast \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0, \text{ m.q. } \forall 0 \leq k \leq p-1, \alpha_k = 0$$

Supposons qu'il existe $0 \leq k \leq p-1$ t.q. $\alpha_k \neq 0$

$$\text{On pose } i = \min \{0 \leq k \leq p-1 \text{ t.q. } \alpha_k \neq 0\}$$

$$\Rightarrow \alpha_i \neq 0 \text{ et } \alpha_{i-1} = 0 \text{ (si existe)}$$

$$\text{Alors } (*) \Rightarrow \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f(x_0)^k = \tilde{0}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 f(x_0)^0 + \alpha_1 f(x_0)^1 + \dots + \alpha_{p-1} f(x_0)^{p-1} = \tilde{0}$$

On applique f^{p-1-i}

$$\Rightarrow \alpha_0 f^{p-1}(x_0) + \alpha_1 f^p(x_0) + \dots + \alpha_{p-1} f^{2(p-1)-1}(x_0) = \tilde{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 f^{p-1}(x_0) = \tilde{0}$$

$$\text{or } f^{p-1}(x_0) \neq \tilde{0} \Rightarrow \alpha_0 = 0 \text{ car } p$$

D'où $\forall 0 \leq k \leq p-1, \alpha_k = 0$

$\Rightarrow$ la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.

c) Puisque $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. donc E qui est de dimension n

$$\text{Alors } \text{card}(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0)) \leq n$$

$$\Rightarrow p \leq n$$

e) soit $h \in \mathcal{A}(E)$ tq $h^2 = f$

$$\Rightarrow h^{2p} = f^p = \tilde{0}$$

$$\text{et } h^{2(p-1)} = f^{p-1} \neq \tilde{0}$$

$$\Rightarrow h^{2p-2} \neq \tilde{0}$$

Alors l'indice de nilpotence de h est $2p-1$ ou $2p$.

D'après 1-c)

$$2p-1 \leq n$$

$$\Rightarrow p \leq \frac{n+1}{2}$$

$$\text{ou } 2p \leq n$$

$$\Rightarrow 2p \leq n+1$$

$$\Rightarrow p \leq \frac{n+1}{2}$$

$$\text{Alors } p \leq \frac{n+1}{2}$$

$$3) C(f) = \{g \in L(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$$

$\bullet C(f) \subset L(E)$ qui est un espace vectoriel.

S. $\tilde{0} \in C(f)$

$\bullet$ soit $g, h \in C(E)$ et $\lambda \in K$

$$(\lambda g + h) \circ f = \lambda g \circ f + h \circ f = \lambda f \circ g + f \circ h = f \circ (\lambda g + h)$$

$$\Rightarrow \lambda g + h \in C(f)$$

D'où $C(f)$ est un s.e.v. de $L(E)$

4) $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une

famille de vecteurs non nuls libre.

De plus $\text{card } B = \dim E = n$, alors

B base de E .

$$5) \text{ soit } H = \left\{ a_0 \text{Id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1} \mid (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in K^n \right\}$$

$$\text{Pq } C(f) = H.$$

Si $g \in H$ alors $\exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in K^n$ tq

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$$

④

$$\Rightarrow g \circ f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \circ f = \sum_{k=0}^{n-1} f \circ a_k f^k$$

$$= f \circ \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = f \circ g$$

D'où $g \in C(f)$.

$$\Rightarrow H \subset C(f)$$

Réciproquement

$$\text{Soit } g \in C(f) \Leftrightarrow g \circ f = f \circ g.$$

On a $g(x_0) \in E$ et B une base de E , alors

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que.

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0).$$

$$\text{Pq } g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k. \text{ Soit } h = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$$

$$\text{On a } g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) = h(x_0)$$

$$\forall 1 \leq p \leq n-1, g(f^p(x_0)) = g \circ f^p(x_0) = f^p \circ g(x_0)$$

$$= f^p \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+p}(x_0)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) (f^p(x_0))$$

$$= h(f^p(x_0))$$

$\Rightarrow g$ et h coïncident en tous les vecteurs de la base B . D'où $g = h = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$
 $\Rightarrow C(f) \subset H$

$$\text{Ainsi } C(f) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k; (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

$$\text{On a } C(f) = \text{vect}(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$$

Pq la famille $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tq

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0$$

$\Rightarrow \forall 0 \leq k \leq n-1, \alpha_k = 0$ car la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.

Ce qui montre que la famille $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre, et par suite c'est une base de $C(f)$.

D'où $\dim C(f) = n$ et $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $C(f)$.

$$7) g \in \mathcal{K}(E) \text{ tq } g^2 = \text{Id}_E + f.$$

$$a) g \circ f = g \circ (g^2 - \text{Id}_E) = g^3 - g$$

$$= (g^2 - \text{Id}_E) \circ g = f \circ g.$$

$$\Rightarrow g \in C(f)$$

b) Puisque $g \in C(f)$, alors il existe

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \text{ tq } g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$$

$$\text{On a } g^2 = \text{Id}_E + f. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right)^2 = Id_E + f$$

$$\Leftrightarrow \sum_{q=0}^{2(n-1)} \left(\sum_{k=0}^q a_k \cdot a_{q-k} \right) f^q = Id_E + f$$

$$\text{Or } f^n = 0 \Rightarrow f^k = 0 \quad \forall n \geq k$$

$$\Rightarrow \sum_{q=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^q a_k a_{q-k} \right) f^q = Id_E + f$$

$$\text{Alors } a_0^2 = 1 ; 2a_0 a_1 = 1$$

$$\forall 2 \leq q \leq n-1 ; \sum_{k=0}^q a_k a_{q-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{On a } a_0^2 = 1 \Rightarrow a_0 \in \{\pm 1\}$$

$$2a_0 a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2a_0} \in \{\pm \frac{1}{2}\}$$

Montrons par récurrence que a_k s'exprime de manière unique en fonction de a_0 .

Le résultat est vrai pour $k=1$

Supposons que le résultat est vrai pour k et montrons pour $k+1$

$$\text{On a } \sum_{i=0}^{k+1} a_i a_{k+1-i} = 0$$

$$2a_{k+1} a_0 + \sum_{i=1}^k a_i a_{k+1-i} = 0$$

$$\Rightarrow a_{k+1} = -\frac{1}{2a_0} \sum_{i=1}^k a_i a_{k+1-i}$$

$\Rightarrow a_{k+1}$ s'exprime de façon unique en fonction de a_0 , puisque

$$1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq k+1-i \leq k$$

d) Puisqu'il y'a deux possibilités de a_0
 $\Rightarrow$ il y'a deux solutions de $g^2 = Id_E + f$.