

Matrice Compagnon

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

1) Pour calculer le déterminant de C_p , on développe selon la 1^{ère} ligne

$$\text{alors } \det C_p = (-1)^{n+1} (-a_0) \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} \\ = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$$

Alors C_p est inversible ssi $\det C_p \neq 0$
ssi $P(0) \neq 0$

$$\text{e) } \chi_{C_p}(x) = \det(xI_n - C_p) \\ = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & a_0 \\ -1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \\ & & x & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

On développe selon la dernière colonne

$$\text{alors. } \chi_{C_p}(x) = (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+2} a_1 \begin{vmatrix} x & & \\ 0 & -1 & \\ & & x \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n-1} \begin{vmatrix} x & & \\ 0 & -1 & \\ & & x \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + (-1)^{n+n-1} a_{n-2} \begin{vmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{vmatrix} + (-1)^{n+n} (x + a_{n-1}) \begin{vmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{vmatrix}$$

$$= a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-2} x^{n-2} + (x + a_{n-1}) x^n \\ \Rightarrow \chi_{C_p}(x) = P(x)$$

3) $Q \in \mathbb{K}[X]$; Q est le polynôme caractéristique d'une matrice A ssi Q est unitaire (coef dominant de C_p est 1)

$$\text{4) } \lambda \in S_{P_{\mathbb{K}}}({}^t C_p) \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - {}^t C_p) = 0 \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - C_p) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in S_p(C_p)$$

$$\text{b) soit } \lambda \in S_{P_{\mathbb{K}}}({}^t C_p) \Leftrightarrow \exists X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ avec } {}^t C_p X = \lambda X$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ x_1 \frac{P(\lambda)}{\lambda} = 0 \text{ vérifiée} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } E_\lambda = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right\}$$

$\square$ C_p est diagonalisablessi
 C_p est diagonalisablessi
 $X_{Cp} = X_{Cp}$ est scindé et

ou $\dim E_\lambda = 1$, d'où mult
Ainsi C_p est diagonalisablessi
est scindé et a racines simples.
La matrice de passage est :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det Q \neq 0 \Leftrightarrow \prod (\lambda_1 - \lambda_n) \neq 0$$

Partie II :

1) soit $0 \leq k \leq n-1$ $f^k(x) = 0 \Rightarrow f^k(x) = 0$

• Soit $x \in N_k \Leftrightarrow f^k(x) = 0$

$\Leftrightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in N_{k+1}$

D'où $N_k \subset N_{k+1}$

• soit $y \in f(N_{k+1}) \Leftrightarrow \exists x \in N_{k+1}$ tq

$$y = f(x) \Rightarrow f^k(y) = f^{k+1}(x) = 0$$

$\Rightarrow y \in N_k$ D'où $f(N_{k+1}) \subset N_k$

2) soit $\varphi: N_{k+1} \rightarrow N_k$
 $x \mapsto f(x)$

φ est linéaire

• D'après le théorème du rang
 $\dim N_{k+1} = \dim \ker \varphi + \dim \text{Im } \varphi$

$$\dim N_{k+1} = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} \varphi)$$

or $\ker f = N_1 \subset N_{k+1}$, d'où
 $\ker f \cap N_{k+1} = \ker f = N_1$
 et $\operatorname{Im} \varphi \subset N_k \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} \varphi) \leq n_k$.

Ainsi $n_{k+1} \leq \dim N_1 + n_k = 1 + n_k$.

3) a) soit $k \in \{0, \dots, p-1\}$ tq $\ker f^k = \ker f^{k+1}$
 tq $\forall j \geq k+1, N_k = N_j$
 Pour $j = k+1$, le résultat est vrai par hypothèse.

soit $j \geq k+1$, supposons que $N_k = N_j$
 et tq $N_{j+1} = N_k$

Puisque $j \geq k$, alors $N_k \subset N_{j+1}$
 soit $x \in N_{j+1} \Leftrightarrow f^{j+1}(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f(f^j(x)) = 0 \Rightarrow f^j(x) \in \ker f$

$$\Rightarrow f^k(f^j(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow f^{k+j+1}(x) = 0 \Leftrightarrow x \in N_{k+1} = N_k$$

$$\Leftrightarrow f^k(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker f^k = N_k$$

$\Rightarrow N_k \subset N_{j+1}$
 Ainsi $N_k = N_{j+1}$

b) On a $N_k \subset N_{k+1} \Rightarrow n_k \leq n$
 et d'après 2) $\dots, n_{k+1} \leq 1 + n_k$
 A. P. R. $n_k \leq n_{k+1} \leq 1 + n_k$
 Alors $n_{k+1} = n_k$ ou bien $n_{k+1} = 1 + n_k$

Supposons qu'il existe $k \in \{0, \dots, p-1\}$ tq
 $n_k = n_{k+1} \Leftrightarrow \dim N_k = \dim N_{k+1}$
 et on a $N_k \subset N_{k+1} \Rightarrow N_k = N_{k+1}$

D'après a) $N_j = N_k, \forall j \geq k+1$
 $\Rightarrow N_k = N_p$

$$\Leftrightarrow \ker f^k = \ker f^p = \ker \sigma = E$$

$$\Leftrightarrow f^k = \sigma \text{ linp car } f^{p-1} \neq \sigma$$

D'où $n_{k+1} = 1 + n_k; \forall 0 \leq k \leq p-1$

Alors $n_k = n_1 + (k-1)1$ (suite arithmétique de raison 1)
 $= 1 + k - 1 = k$

$n_k = \dim \ker f^k = k$

On déduit $n_p = 1 + n_{p-1}$
 $\parallel$
 $\dim \ker f^p = 1 + p - 1 = p$
 $\parallel$
 $\dim E$

Partie III

On a f est cyclique, alors il existe $x_0 \in E$ tq $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .

• Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tq

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = \tilde{0} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0$$

$\Rightarrow \alpha_k = 0$, car B est libre

$\Rightarrow$ la famille $(Id_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

2) On a $(f - \lambda_k Id_E)$ commute avec f .

Alors $(f - \lambda_k Id_E)^{m_k}$ commute avec f .
D'où $\ker_{F_k} (f - \lambda_k Id_E)^{m_k}$ est stable par f .

• Les $\forall p$ $\lambda_k, 1 \leq k \leq p$ sont 2 à 2 $\neq$
alors les polynômes $(x - \lambda_k)^{m_k}, 1 \leq k \leq p$
sont premiers entre eux deux à deux.
Alors d'après le lemme de décomposition
des noyaux

$$\ker \left(\prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{m_k} \right) (f) = \bigoplus_{k=1}^p \underbrace{\ker (x - \lambda_k)^{m_k}}_{F_k}$$

$\ker X_f(f)$

D'après le th de Cayley-Hamilton

$$X_f(f) = \tilde{0} \Rightarrow \ker X_f(f) = \ker$$

Ainsi $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$

3) On a F_k est stable par f , alors F_k est en

$\varphi_k(F_k) \subset F_k$. D'où φ_k est un endomorphisme de F_k .

$$\forall x \in F_k = \ker (f - \lambda_k Id_E)^{m_k}$$

$$\Leftrightarrow (f - \lambda_k Id_E)^{m_k}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi_k^{m_k}(x) = 0, \forall x \in F_k$$

$$\Leftrightarrow \varphi_k^{m_k} = \tilde{0}$$

ii) Maq $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$.

Supposons que $\varphi_k^{m_k-1} = \tilde{0}$.

$$\Leftrightarrow (f - \lambda_k Id_E)^{m_k-1} = 0, \forall x \in F_k$$

On pose

$$Q(x) = (x - \lambda_k)^{m_k-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p (x - \lambda_j)^{m_j}$$

Si $x \in F_i, \forall i \neq k \Rightarrow Q(f)(x) = 0$

$\Rightarrow Q(f)(x) = 0, \forall x \in E$, car $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$

$\Rightarrow Q$ est un polynôme annulateur

(4)

$$\deg \varphi = m_k - 1 + \sum_{j=1}^k m_j$$

$$= n - 1 < n$$

Q poly non nul
 $\deg \varphi < n$
 $Q(f) = 0$

$\Rightarrow$ la famille
 $(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est
liée ce qui est absurde

D'où $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$.

ii) On a $\dim F_k = m_k$

On a $\sum_{k=1}^p \dim F_k = n$ ($E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$)

$$= \sum_{k=1}^n m_k \text{ (poly constant)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^p (m_k - \dim F_k) = 0$$

D'autre part on a:

F_k est stable par f , on pose
 $f_k: F_k \rightarrow F_k$ l'endomorphisme
 $x \mapsto f(x)$ induit par f sur F_k

$$(f_k - \lambda_k)^{m_k} = \varphi_k^{m_k} = 0 \text{ sur } F_k$$

$\Rightarrow Q_k(x) = (x - \lambda_k)^{m_k}$ est un
 poly annulateur de f_k

Or $\varphi_k^{m_k-1} \neq 0$, d'où
 Q_k est le polynôme minimal
 et comme λ_k est la seule vp de f_k
 $(\text{Spec}(f_k) \neq \emptyset) \Rightarrow \chi_{f_k}(x) = (x - \lambda_k)^{m_k}$
 et $Q_k \mid \chi_{f_k}$. Alors $m_k \leq \dim F_k$

D'après ce qui précède.

$$\sum_{k=1}^p (\underbrace{\dim F_k - m_k}_{\geq 0}) = 0$$

Alors. $\dim F_k = m_k, \forall 1 \leq k \leq p$

i) $g^r = 0$ et $g^{r-1} \neq 0$

$\exists a \in E$ tq $g^{r-1}(a) \neq 0$

La famille $\mathcal{B} = (a, g(a), \dots, g^{r-1}(a))$ est
 une base de G et

$$M(g, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) On a φ_k est nilpotent d'indice m_k
 avec $m_k = \dim F_k$, alors il existe
 une base $\mathcal{B}_k$ de F_k tq

$$M(\varphi_k, \mathcal{B}_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\Pi(f_k, B_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \lambda_k \end{pmatrix} = J_k$

D'autre part puisque

$E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$, alors.

$B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ est une base de E

et $\Pi(f, B) = \begin{pmatrix} \Pi(f_1, B_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Pi(f_p, B_p) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix}$

d) soit C_{X_f} la matrice Compagne de X_f .

et g l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice C_{X_f} . Alors

$X_g(x) = X(C_{X_f}) = X_f(x) = \prod_{k=1}^n (x - d_k)^{m_k}$

$\Rightarrow g$ est cyclique $\Rightarrow$ la famille

$(\text{Id}_E, g, \dots, g^{n-1})$ est libre $\Rightarrow$ d'après ce qui précède il existe une base de E B'

$\Pi(g, B') = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_p \end{pmatrix} \Rightarrow C_{X_f}$ est semblable à cette matrice $\Leftrightarrow \exists B' \text{ t.q. } \Pi(f, B') = C_{X_f} \Rightarrow f \text{ cyclique (6)}$

Partie IV

1) soit $g \in C(f) \Leftrightarrow g \circ f = f \circ g$

On a $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E

$g(x_0) \in E \Rightarrow g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$

Il y a $g = P(f)$ avec $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$

On a $g(x_0) = P(f)(x_0)$

$g(f^k(x_0)) = f^k(g(x_0))$ ($f^k g = g f^k$)
 $= f^k \circ P(f)(x_0) = P(f)(f^k(x_0))$

$\Rightarrow \forall k \leq n-1$
 $g(f^k(x_0)) = P(f)(f^k(x_0))$

Comme $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E

Alors $g = P(f) \Rightarrow g \in K_n[f]$

" $\Leftarrow$ " s'il existe $R \in K_{n-1}[x]$ t.q.

$g = R(f)$ alors $g \circ f = R(f) \circ f = f \circ R(f) = f \circ g$

$\Rightarrow g \in C(f)$

" $\Rightarrow$ " Si $g \in C(f)$, d'après la question précédente il existe $P \in K_{n-1}[x]$ t.q.

$g = P(f)$

$C(f) = \{I, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$; nq f est cyclique
 après la partie. III] il suffit
 de nq la famille $(Id, f, f^2, \dots, f^{n-1})$
 est libre.

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$ tq

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = \tilde{0} \iff Q(f) = \tilde{0}$$

 avec $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k$

Supposons que $Q \neq \tilde{0}$.

On considère $g \in C(f) = \{I, f, \dots, f^{n-1}\}$, $P \in K[x]$ tq
 $g = P(f)$.

On effectue la division euclidienne de P par $Q \Rightarrow \exists R \in K[x]$ tq $\deg R \leq n-2$

$$P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$$

$$\Rightarrow P(f) = Q(f) \cdot H(f) + R(f)$$

$$\Rightarrow g = R(f) \quad \deg R \leq n-2$$

$$\Rightarrow C(f) \subset \text{vect} \{Id, f, \dots, f^{n-2}\}$$

$$\Rightarrow \dim C(f) \leq n-1.$$

Ce qui est absurde. Car $\dim C(f) \geq n$

3) "Si $C(f) = \{I, f\}$, alors f est cyclique d'après 2)

" $\Leftarrow$ " si f est cyclique, on a $\{I, f\} \subset C(f)$ tq vrai

Soit $g \in C(f)$, d'après b) $\exists R \in K[x]$ tq
 $g = R(f) \Rightarrow g \in \{I, f\}$

$$f \text{ cyclique} \iff C(f) = \{I, f\}$$

Partie VI

f est un p -cycle $\iff \exists x_0 \in E$ tq
 la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est
 génératrice.

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, \dots, p-1\} \\ f^p(x_0) = x_0, \\ f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f^p(f^k(x_0)) = Id_E(f^k(x_0))$$

Comme la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$
 est génératrice, alors $f^p = Id_E$

a) $H = \{ k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est libre} \}$
 Puisque $\dim E = n$, alors $k \leq n$
 De plus $H \neq \emptyset$ car $k=1 \in H$
 ($\{x_0\}$ est libre)

H non vide et majorée de $\underline{n}$

Alors H admet un maximum

Soit $m = \max H = \max \{ k \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)) \text{ est libre} \}$

a) $\forall k \geq m, f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$

Pour $k=m$, on a la famille $\{x_0, \dots, f^{m-1}(x_0)\}$ est libre et $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$ liée; donc $f^m(x_0) \in \text{vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$

Soit $k > m$, supposons que $f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$

$\Rightarrow f^{k+1}(x_0) \in \text{vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0))$
 $\parallel$
 $\text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$

Ainsi, $\forall k \geq m, f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$

b) On a la famille $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$ génératrice, alors

La famille $(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre

Alors $m \leq n$

$\Rightarrow m \leq n \leq p$

Comme $\forall k \geq m, f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$

$\Rightarrow \forall m \leq k \leq p, f^k(x_0) \in \text{vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$

$\Rightarrow \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)) = \text{vect}(x_0, \dots, f^{m-1}(x_0))$
 $\parallel$
 E

$\Rightarrow \text{vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)) = E$

$\Rightarrow$ la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est génératrice et puisqu'elle est libre alors c'est une base de E

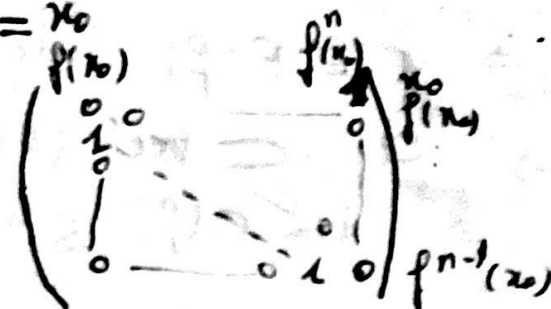
$\Rightarrow m=n$ et f est cyclique.

4) f est un n -cycle.

$\Rightarrow B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E

et $f^n(x_0) = x_0$

$\Rightarrow \pi(f, B) =$



D'après la 1^{re} partie

$$X_f(X) = X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \lambda_k)$$

avec $\lambda_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}$; $0 \leq k \leq n-1$

X_f est scindé et a racines simples.
Alors f est diagonalisable.

D'après I-4-b) $E_{\lambda_k} = \text{vect}(v_k)$ où

$$v_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ est une base
de E et $\Pi(f, B) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$

Partie III question 1

" $\Rightarrow$ " f est cyclique, il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tq

$B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ base de E .

$\Rightarrow \Pi(f, B) = \begin{pmatrix} f(x_0) & \dots & f^{n-1}(x_0) \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & & \\ & b_1 & \\ & & \ddots \\ & & & b_{n-1} \end{pmatrix}$

$f^n(x_0) \in E \Rightarrow \exists b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \in K$ tq

$f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^k(x_0)$
 $\Rightarrow \exists P(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ tq $\Pi(f, B) = C_P$

" $\Leftarrow$ " Si $f \in \mathcal{V}(E)$ tq $\exists P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$
et $B = (e_1, \dots, e_n)$ tq $\Pi(f, B) = C_P$

$\Leftrightarrow \Pi(f, B) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ & & & -a_1 \\ & & & \vdots \\ & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(e_1) = e_2$
 $f(e_2) = e_3 \Rightarrow e_3 = f^2(e_1)$

$f(e_{n-1}) = e_n \Rightarrow e_n = f^{n-1}(e_1)$

$\Rightarrow B = (e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ base de E