

Série I : Réduction

Exercice 1 Soit U l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], U(P) = XP + (1 - X)^2 P'$$

1. Montrer qu'un éventuel vecteur propre de U est un polynôme de degré 1.
2. Montrer que le sous espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par U .
On note U_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ induit par U .
3. Ecrire la matrice de U_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.
4. En déduire les valeurs et les vecteurs propres de U_1 puis ceux de U .

Exercice 2 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et U l'application définie sur E par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], U(P) = X(X - 1)P' - nXP$$

1. Vérifier que U est un endomorphisme de E .
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in E$.
Montrer que $U(P) = \lambda P$ si et seulement si P est une solution de l'équation différentielle

$$F_\lambda : x(x - 1)y' - (nx + \lambda)y = 0.$$
3. Montrer que F_λ admet sur $]1, +\infty[$ une solution polynomiale non nulle de degré inférieur ou égale à n si et seulement si λ est un entier négatif compris entre $-n$ et 0 .
4. En déduire que $Sp(U) = \{-n, \dots, -1, 0\}$.

Exercice 3 Soit $E = C^0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère l'application ϕ définie par pour tout $f \in E$, $\phi(f) = g$ tel que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = f(0) \end{cases}$$

1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de ϕ .

Exercice 4 Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, B une base de E , f un endomorphisme de E et A la matrice de f dans la base B .

1. Montrer que f admet une droite vectorielle stable si et seulement si $Sp(f) \neq \emptyset$
2. On suppose $Sp(f) = \emptyset$.
 - a) Justifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $Z \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AZ = \lambda Z$.
 - b) On écrit $Z = X + iY$ avec $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $x, y \in E$ tel que $X = Mat_B(x)$ et $Y = Mat_B(y)$. Démontrer que $Vect(x, y)$ est un plan stable par f .

Exercice 5 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, Φ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\Phi(M) = AM - MA, \forall M \in M_n(\mathbb{R}).$$

On pose $\Gamma = \{\lambda - \mu; \lambda, \mu \in Sp(A)\}$

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ et $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à une valeur propre μ .

On pose $M_{X,Y} = X^t Y \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Justifier que $M_{X,Y} = X^t Y \neq 0_n$.

2. Montrer que $\Gamma \subset Sp(\Phi)$.
On admet dans la suite qu'il existe $(V_1, \dots, V_n)$ une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propre de A et que $Sp(A) \subset \mathbb{R}$.
3. Soit M un vecteur propre de Φ associé à une valeur propre α .
Montrer qu'il existe Z_0 un vecteur propre de A tel que $MZ_0 \neq 0$.
On note μ la valeur propre de A associée au vecteur propre Z_0 .
4. Montrer que MZ_0 est un vecteur propre de A associé à une valeur propre que l'on exprimera à l'aide de α et μ .
5. Conclure

Exercice 6 "Théorème de Cayley-Hamilton".

Soit E un IK espace vectoriel de dimension finie, U un endomorphisme de E et F un sous espace vectoriel de E

1. Soit F un sous espace vectoriel de E stable par U et U_F l'endomorphisme induit par U sur F .
Montrer que χ_{U_F} divise χ_U
2. Soit x un vecteur de E non nul. Montrer l'existence d'un entier $p \leq n$ tel que
 $(x, U(x), \dots, U^{p-1}(x))$ est une famille libre de E
et $U^p(x) \in F_x = \text{vect}(x, U(x), \dots, U^{p-1}(x))$.
3. Dédurre que F_x est stable par U
4. On note $\tilde{U}$ l'endomorphisme induit par U sur F_x .
a) Calculer $\chi_{\tilde{U}}$.
b) En déduire que $\chi_U(U)(x) = 0$ puis $\chi_U(U) = \tilde{0}$

Exercice 7 Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ et U un endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), U(M) = M + \text{tr}(M)I_n.$$

1. Montrer que $U^2 = (n+2)U - (n+1)Id_E$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de U .

3. Montrer que U est diagonalisable.
4. Donner le polynôme caractéristique de U .

Exercice 8 Soit $E = M_n(IK)$, $n \geq 2$ et $A \in E$.
On appelle commutant de A , noté $\mathcal{C}(A)$ l'ensemble défini par :

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in M_n(IK), AM = MA\}$$

1. Justifier que $\mathcal{C}(A)$ est un sous espace vectoriel de $M_n(IK)$.
2. Montrer que si A est une matrice diagonale d'éléments diagonaux deux à deux distincts, alors $\mathcal{C}(A) = \mathcal{D}_n(IK)$ l'espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(IK)$.
3. Montrer que si A est diagonale par blocs telle que $A = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont deux à deux distincts, alors $\mathcal{C}(A) = \{M = \text{diag}(M_1, \dots, M_r); M_k \in M_{n_k}(IK)\}$
4. On suppose que A est diagonalisable de valeurs propres deux à deux distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_r$.
a) Montrer que $\dim(\mathcal{C}(A)) = \sum_{k=1}^r n_k^2 = \sum_{k=1}^r (\dim(E_{\lambda_k}(A)))^2$.
b) En déduire $\dim(\mathcal{C}(A)) \geq n$.

. Problème

On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie la condition $\mathcal{ST} > 0$ si

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, n], \quad a_{i,j} > 0, \quad (0.1)$$

$$\forall i \in [1, n], \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1. \quad (0.2)$$

Dans tout le problème, on considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie la condition $\mathcal{ST} > 0$

1) Montrer que 1 est une valeur propre de A .

2) a) Soit $B = (b_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice non inversible.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, avec $X \neq 0$ et $BX = 0$. On a alors $k \in [1, n]$

tel que $|x_k| = \max_{i \in [1, n]} |x_i|$.
Justifier l'inégalité

$$|b_{k,k}| \leq \sum_{j \neq k} |b_{k,j}|.$$

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, Montrer qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq 1 - a_{k,k}.$$

En déduire que $|\lambda| \leq 1$.

3) Pour $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $|\lambda| = 1$, on peut écrire $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, ce qui nous donne :

$$|a_{k,k} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{k,k},$$

Déduire que $\cos(\theta) = 1$, puis $\lambda = 1$.

4) Montrer que $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et que les sous espaces propres $E_1(A)$ et $E_1({}^tA)$ ont même dimension.

5) Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, avec $V \neq 0$ et ${}^tAV = V$.

a) Montrer que pour tout $i \in [1, n]$:

$$|v_i| = \sum_{j \in [1, n]} a_{j,i} |v_j|.$$

On note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ |v_2| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$

Montrer que ${}^tA|V| = |V|$ puis que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|v_i| > 0$.

6) a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments non nuls de $E_1({}^tA)$.

En considérant le vecteur $X - \frac{x_1}{y_1}Y$, déterminer la dimension de $E_1({}^tA)$.

b) Justifier qu'il existe $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ qui engendre $E_1({}^tA)$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\omega_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$

c) Déduire $\dim E_1(A)$ et vérifier que pour tout $i \in [1, n]$, $\sum_j a_{j,i} \omega_j = \omega_i$.

7) A l'aide du vecteur $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$ définie dans 6) on considère l'application

N définie sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}), \quad N(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i |x_i|$$

- a) Montrer que N est une norme sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$.
- b) Montrer que pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $N(AX) \leq N(X)$.
- c) Retrouver le résultat, si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| \leq 1$,

8) A l'aide de la matrice colonne $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$,

on définit l'application Φ par

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \Phi(X) = \sum_{i=1}^n \omega_i x_i$$

- a) Vérifier que Φ est une forme linéaire.
- b) Montrer que

$$X \in M_{n,1}(\mathbb{C}) \quad \Phi(AX) = \Phi(X)$$

- c) Montrer que

$$M_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \ker(\Phi)$$

- d) Soit $X \in E_\lambda(A)$ $\lambda \neq 1$, montrer que $X \in \ker(\Phi)$
- e) Justifier que $\ker(\Phi)$ est stable par Φ .

En utilisant les résultats précédents, déterminer l'ordre de multiplicité de la valeur propre 1 de la matrice A