

Série Réduction

Exercice 1 "Questions de cours"

On considère E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E .

1. a) Montrer que des sous espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distincts sont en somme directe.
b) Montrer que des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distincts forment une famille libre.
c) Dédire que $\text{card}(\text{Sp}(u)) \leq \dim(E)$.
2. Montrer pour tout λ valeur propre de u on a :

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \text{mul}(\lambda).$$

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.

Exercice 3 Soient $n \geq 2$ un entier naturel et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

On note $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A (c-à-d $A = \text{mat}_B(f)$).

1. Calculer $f(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, puis calculer $f^n(e_i)$, $i = 1, \dots, n$.
2. En déduire que $f^n = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$.
3. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Notons $\alpha = e^{i2\pi/n}$ et pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\lambda_k = e^{i2k\pi/n} = \alpha^k$.
(a) Trouver $E_k = \ker(A - \lambda_k I_n)$.

(b) En déduire les valeurs propres de f et leurs ordres de multiplicité.

(c) Trouver une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

5. Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on note $T(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$.

Diagonaliser la matrice $T(A)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

6. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, défini par

$$\phi(M) = -M + \text{tr}(M).A$$

(a) Trouver le spectre de ϕ .

(b) ϕ est-il diagonalisable ?

- (c) a) Soit $P(X) = X^2 + 2X + 1$. Vérifier que P est un polynôme annulateur de ϕ .
b) Déterminer le polynôme minimal de ϕ .
c) Retrouver le résultat de 6 - b).

Exercice 4 On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \varphi(P)(X) = -3XP'(X) + (1 - X^2)P''(X).$$

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à n . Montrer que φ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$ qu'on notera φ_n .
- 2) On notera A_n la matrice de φ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
a) Expliciter A_2 .
b) Donner A_n , $n \geq 3$.
c) A_n est-elle diagonalisable ?
- 3) Montrer qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de φ_n et vérifiant pour tout $0 \leq k \leq n$
i) $\deg(P_k) = k$
ii) le coefficient dominant de P_k est 1.
- 4) Pour tout $k = 0, \dots, n$, on note λ_k la valeur propre de φ_n associée au vecteur propres P_k et on note $R_k(X) = P_k(-X)$.

- a) Montrer que $\varphi_n(R_k) = \lambda_k R_k$.
 b) En déduire la parité de P_k .
 c) Montrer que pour tout $k \geq 3$, $P_k = X^k + \frac{1-k}{4} X^{k-2} + Q$ avec $\deg(Q) \leq k-3$.

Exercice 5 "Projecteur".

Soient E un IK -espace vectoriel ($IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et p un projecteur de E . On suppose que $p \neq Id_E$ et $p \neq 0$.

- 1) Montrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.
- 2) Montrer $Sp(p) = \{0, 1\}$ et que p est diagonalisable.
- 3) Montrer que $\text{trace}(p) = \text{rg}(p)$.
- 4) Montrer que $(Id_E + p)$ est inversible et déterminer $(Id_E + p)^{-1}$. (On cherche $(Id_E + p)^{-1}$ sous la forme $(Id_E + \alpha)$.)

- 5) Soient $E = M_n(\mathbb{R})$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in E$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi: E &\longrightarrow E \\ A &\longmapsto \frac{\text{tr}(AJ)}{n^2} J. \end{aligned}$$

- a) Montrer que $\phi(J) = J$.
- b) Montrer que ϕ est un projecteur.
- c) Déterminer $\text{Im}(\phi)$ et $\text{Ker}(\phi)$.
- d) En déduire le polynôme caractéristique de ϕ ?

Exercice 6 "Endomorphisme de rang 1"

Soient E un IK -espace vectoriel de dimension finie ($IK = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f un endomorphisme de E de rang 1. On pose $v_1 \in E \setminus \{0\}$ tel que $\text{Im}(f) = \text{vect}(v_1)$.

- 2) Montrer que si $\text{tr}(f) \neq \{0\}$, alors $Sp(f) = \{0, \text{tr}(f)\}$ et f est diagonalisable.
- 3) a) Montrer que si $\text{tr}(f) = 0$, alors f est nilpotent d'indice 2.
 b) Déduire que f est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(f) \neq \{0\}$.
- 4) a) Montrer que $f^2 - \text{tr}(f)f = 0$.
 b) Retrouver le résultat de 3)b).
 c) Caractériser f lorsque $\text{tr}(f) = 1$.
 d) Dans le cas où $\text{tr}(f) \neq 0$, déterminer les éléments $\alpha \in IK$ pour lesquels $id_E - \alpha f$ est une symétrie de E .

- 5) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que f est diagonalisable, puis diagonaliser f .

Exercice 7 Soient E un IK -espace vectoriel de dimension finie ($\dim(E) = n$) et f un endomorphisme de E .

On suppose que f est nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$.

- 1) Justifier qu'il existe $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0_E$ et que $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est libre.
- 2) Comparer p et n .
- 3) Déterminer $Sp(f)$, puis déduire χ_f le polynôme caractéristique de f et π_f le polynôme minimal de f .
- 4) f est-il diagonalisable?
- 5) Justifier que f est trigonalisable et trigonaliser f .

Exercice 8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

et P_n son polynôme caractéristique.

1. Démontrer que pour $n \geq 2$ on a :

$$P_n(X) = X P_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$$

2. Calculer P_1 et P_2
3. Pour $x \in]-2, 2[$, on pose $x = 2 \cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sin(\alpha) P_n(X) = \sin((n+1)\alpha)$$

4. a) Montrer que

$$Sp_{\mathbb{R}}(A_n) = \{\lambda_k = 2 \cos(\frac{k\pi}{n+1}), k \in \{1, \dots, n\}\}.$$

- b) Montrer que A_n est diagonalisable.

5. Déduire que :

i) $\sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = 0.$

ii) $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

iii) $\det(A_n) = (-1)^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$

6. Soit $B_n = aI_n + bA_n$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Justifier que B_n est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Exercice 9 • On note $O_n(\mathbb{R}) = \{O \in M_n(\mathbb{R}); {}^tOO = I_n\}$ l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

• Une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite positive si elle vérifie

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0$$

L'ensemble des matrices positives sera notées $S_n^+(\mathbb{R})$

• Une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si elle vérifie

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXSX > 0$$

L'ensemble des matrices définies positives sera notées $S_n^{++}(\mathbb{R})$

On admet que si S est une matrice symétrique réelle, alors toutes ses valeurs propres sont réelles et il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tP \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de S .

1. a) Montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$.

b) Montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX = 0$, montrer que S est la matrice nulle.

3. a) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

b) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

4. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) S est définie positive .

b) Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.

c) Il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$, telle que $S = {}^tMM$.

d) S est positive et inversible.

Exercice 10

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

Justifier que A est trigonalisable, puis montrer qu'elle est semblable à la matrice T

suivante $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

a) Montrer que le polynôme caractéristique de B est $\chi_B(X) = (X-2)^3$, puis déduire que B est trigonalisable.

b) On pose $D = B - 2I_3$, $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et v l'endomorphisme canoniquement associé à D .

Vérifier que v est nilpotent d'indice 3 et que $B' = (e_1, v(e_1), v^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Déduire la trigonalisation de B .

Problème.

Objectifs.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$. On note $\text{Rac}(A)$ l'ensemble des racines carrées de A , c'est à dire

$$\text{Rac}(A) = \{R \in M_n(\mathbb{R}) / R^2 = A\}$$

. Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents exemples. Les trois premiers exemples sont tous indépendants.

Exemple 1 : cas où A possède n valeurs propres distinctes.

On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

1. Justifier l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ puis montrer que R est une racine carrée de A , si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D .

2.

Soit S une racine carrée de D .

a. Montrer que $DS = SD$.

- b. En déduire que la matrice S est diagonale.
 c. On note alors $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, \dots, n\}$?
 d. Que peut-on dire de $\text{Rac}(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative?
 e. Si on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D . On pourra poser $\epsilon_i \in \{-1; +1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.
 3. Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P . Combien de racines carrées A admet-elle? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).
 4. Application : Ecrire toutes les racines carrées de

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}. \text{ On donnera explicitement les coefficients des solutions trouvées.}$$

Exemple 2 : cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

Dans cet exemple, on cherche à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.

Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une racine carrée de la matrice nulle.

5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On

note r le rang de f .

- a. Comparer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ puis montrer que $r \leq \frac{n}{2}$.

b. On suppose f non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(f)$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ pour former une base de $\text{Ker}(f)$. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on note u_i le vecteur tel que $f(u_i) = e_i$.

Montrer que la famille $B = (e_1, \dots, e_r, u_1, \dots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans la base B . On notera M_r cette matrice.

6. a. Ecrire toutes les racines carrées dans $M_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle à l'aide de M_r et d'une matrice inversible P .

b. Application : déterminer dans $M_4(\mathbb{R})$, les racines carrées de la matrice nulle. (On ne cherchera pas à calculer explicitement les coefficients de R).

Exemple 3 : cas où $A = I_n$ la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

7. Soit R une racine carrée de l'unité I_n .

a. Vérifier que R est une matrice inversible.

b. Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.

8. Déterminer $\text{Rac}(I_n)$ en s'inspirant de la question 6a.