

Préparatoire MP2

Prof : Nedra Moalla

Série III : Réduction

Exercice 1 Les questions de cet exercice sont indépendantes.Soient A, B deux matrices de $M_n(IK)$.1. a) Vérifier que 0 est une valeur propre de AB si et seulement si BA .b) Montrer que $Sp_{IK}(AB) = Sp_{IK}(BA)$.2. a) On considère la matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{p,n}(IK)$ avec $(r \leq \min(n, p))$.Montrer pour toute matrice $B \in M_{n,p}(IK)$, $X^n \chi_{J_r B}(X) = X^p \chi_{B J_r}(X)$.b) Dédurre pour toute matrice $A \in M_{p,n}(IK)$ et $B \in M_{n,p}(IK)$, $X^n \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{BA}(X)$.3. Soit A une matrice inversible.Vérifier que pour tout $\lambda \neq 0$, $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{\lambda^n}{\chi_A(0)} \chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.**Exercice 2** "Matrice stochastique".Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{cases} \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{ij} \in [0, 1] \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que 1 est une valeur propre de A .2. Soit λ une valeur propre de A .a) Montrer que $|\lambda| \leq 1$.b) Montrer qu'il existe $w \in [0, 1]$ tel que $|\lambda - w| \leq 1 - w$.**Exercice 3** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = (X - 2)^3$ puis justifier que A est trigonalisable.2. On pose $B = A - 2I_3$, $B_e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à B . Vérifier que $v^2(e_1) \neq 0$.3. En déduire la trigonalisation de A .**Exercice 4** Soit $\beta \in \mathbb{C}$ on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 - \beta & 4 & \beta \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A .2. Déterminer le polynôme minimal de A (On pourra discuter selon les valeurs de β).

$$\text{Exercice 5 Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.2. Déterminer $\ker(A - I_3)^2$.3. Montrer que A est semblable à $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

Exercice 6 On considère E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u deux à deux distincts de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_p$. On pose $F_k = \ker(u - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$.

1. Vérifier que $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$.

2. i) Justifier que $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ F_k est stable par u . On note u_k l'endomorphisme induit par u sur F_k .

ii) Montrer que $u_k = H_k + N_k$ avec H_k est une homothétie et N_k est un endomorphisme nilpotent.

3. a) Montrer que $E = F_k \oplus G$ avec G est un sous-espace stable par u et que $\text{Sp}(u_k) = \{\lambda_k\}$.

b) Montrer que $\dim(F_k) = m_k = \text{mult}(\lambda_k)$.

4. a) On suppose dans cette question que $\chi_u = \pi_u$. Montrer que N_k est nilpotent d'indice m_k .

b) Dédire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u

s'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J_p \end{pmatrix}$$

avec $J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$

Exercice 7 On considère E un K -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $IK[u] = \{P(u), P \in K[X]\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Notons Π_u le polynôme minimal de u avec $\deg(P) = d \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $IK[u] = \text{vect}(\text{id}_E, u, u^2, \dots, u^{d-1})$.

2. Dédire que $\dim(ik[u]) = d$.

3. Dédire que $\chi_u = \Pi_u$ si et seulement si $\dim(ik[u]) = n$.

Exercice 8 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A nilpotente si et seulement si $\text{tr}(A^k) = 0, \forall k \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 9 On considère A, B, C et D des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

1. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC). \quad (1)$$

2. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

3. On suppose que D est non inversible.

a) Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $p \geq p_0$, $D + \frac{1}{p}I_n$ est inversible.

b) En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.

Considérons une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(N) = \{\mu \in \mathbb{C}; \mu^2 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)\}$.

5. Soit $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(N)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de N associé à la valeur propre μ .

Montrer que le vecteur $Y = \begin{pmatrix} X \\ \mu X \end{pmatrix} \in M_{2n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ .

6. a) Justifier si M est inversible, alors N est inversible.
 b) Soit λ une valeur propre non nul de M , on note μ_λ et $-\mu_\lambda$ ses deux racines complexes distincts. Montrer que les applications linéaires suivantes sont injectives

$$\begin{cases} \ker(M - \lambda I_n) \rightarrow \ker(N - \mu_\lambda I_{2n}) \\ X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ \mu_\lambda X \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ker(M - \lambda I_n) \rightarrow \ker(N + \mu_\lambda I_{2n}) \\ X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ -\mu_\lambda X \end{pmatrix} \end{cases}$$

- c) Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

Problème "Décomposition de Dunford"

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. On suppose que χ_u est scindé et on pose

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$$

ou les λ_k sont les valeurs propres de u deux à deux distincts.

Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, on pose $Q_k(X) = \prod_{i=1, k \neq i}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$ et

$$F_k = \ker(u - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}.$$

1. Montrer que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^p F_k$.

2. a) Vérifier qu'il existe des polynômes $R_1, \dots, R_p$ tels que $\sum_{k=1}^p Q_k R_k = 1$.

- b) Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ on considère l'endo $\Pi_k = (Q_k R_k)(u)$. Vérifier que $\Pi_1 + \Pi_2 + \dots + \Pi_p = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$.

3. Soit k et n deux entiers distincts appartenant à $\{1, \dots, p\}$.

a) Montrer que si $v \in F_k$, alors $\Pi_n(v) = 0$.

b) Montrer que $v \in F_k$, alors $\Pi_k(v) = v$.

- c) Dédire que $k \in \{1, \dots, p\}$, Π_k est la projection sur F_k parallèlement

$$\text{à } \bigoplus_{i=1, i \neq k}^p F_i.$$

4. On considère l'endomorphisme $d = \lambda_1 \Pi_1 + \lambda_2 \Pi_2 + \dots + \lambda_p \Pi_p$.

Vérifier que Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ la restriction de d à F_k est diagonalisable puis déduire que d est diagonalisable.

5. On pose $n = u - d$.

a) Montrer que si $v \in F_j$, alors $n^{m_j}(v) = 0$.

- b) En déduire que l'endomorphisme n est nilpotent.

6. Soit d' un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{C}^n$ qui commute avec u .

a) Montrer que F_k est stable par d' pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$.

- b) En déduire que les endomorphismes d et d' sont diagonalisables dans une même base de $\mathbb{C}^n$.

7. Montrer que pour tout endomorphisme u de $\mathbb{C}^n$, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ tels que d est diagonalisable, n est nilpotent, $d \circ n = n \circ d$ et $u = d + n$.

8. En déduire que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ il existe un unique couple (D, N) de matrices D est diagonalisable, N est nilpotente, $D \circ N = N \circ D$ et $A = D + N$.

On dira que $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A .

9. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A . Montrer que si A est inversible, alors D est inversible