

Exercice 1

1) si P est un vecteur propre de U , alors $P \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $U(P) = \lambda P$.

On pose $\deg P = n \in \mathbb{N}$.

$$U(P) = \lambda P \Leftrightarrow xP + (1-x)P' = \lambda P.$$

On note a_n le coeff dominant de P .

• Si $\lambda \neq 0$.

Alors $\deg(U(P)) = \deg(\lambda P) = n$

$$\begin{cases} a_n(1-n) = 0 \\ a_n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{n=1}$$

• Si $\lambda = 0 \Rightarrow xP(1-x)P' = 0$

$$\Rightarrow a_n(1-n) = 0 \Rightarrow \underline{n=1}$$

2) soit $P(x) = ax + b \in \mathbb{R}_1[x]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U(P) &= x(ax+b) + (1-x)a \\ &= bx + a. \in \mathbb{R}_1[x] \end{aligned}$$

3) $B_C = (1, X)$ base canonique de $\mathbb{R}_1[x]$

$$\text{Mat}(U, B_C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) $\chi_{U_1}(x) = x^2 - 1$

$$\chi_{U_1}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow S_P(U_1) = \{-1, 1\}$$

$$\text{ma } S_P(U_1) \subset S_P(U) \Rightarrow \{1, -1\} \subset S_P(U)$$

si $\lambda \in S_P(U)$, alors $\exists P \neq 0$ tq $U(P) = \lambda P$
d'après 1/ $\deg P = 1 \Rightarrow P_1 \in \mathbb{R}_1[x]$

$\Rightarrow P_1$ vecteur propre de U_1

$$\Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow S_P(U) \subset \{\pm 1\}$$

$$\underline{\text{cl}} \quad S_P(U) = \{-1, 1\}$$

Exercice 2

1) $\forall P \text{ poly}$, $U(P)$ est un poly.

De plus si $\deg P \leq n$, alors

$$\deg(U(P)) \leq \max(\deg x(x-1)P'; xP) \leq n+1$$

or. coef de x^{n+1} dans $U(P)$ est 0

$$\Rightarrow \deg(U(P)) \leq n \Leftrightarrow U(P) \in \mathbb{R}_n[x]$$

cl U est un endo de $\mathbb{R}_n[x]$

2) $U(P) = \lambda P \Leftrightarrow x(x-1)P' - n(x-1)P = \lambda P$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}; x(x-1)P'(x) - (nx+1)P(x) = 0$$

$\Leftrightarrow P$ solution de l'eq diff. F_λ .

3) $F_\lambda: x(x-1)y' - (nx+1)y = 0, x \in]1;$

$$\Leftrightarrow y' - \frac{nx+1}{x(x-1)} y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x) = x e^{-\int \frac{nx+1}{x(x-1)} dx}$$

Soit $G(x) = \frac{nX + \lambda}{X(X-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$

$a = -\lambda$ et $b = \lambda + n$

$\Rightarrow \int G(x) dx = \int -\frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda+n}{x-1} dx$
 $= (\lambda+n) \ln|x-1| - \lambda \ln|x| + c$
 $= \ln \left(\frac{(x-1)^{\lambda+n}}{x^\lambda} \right) + c$

Ainsi $y(x) = \alpha \frac{(x-1)^{\lambda+n}}{x^\lambda}$, $x \in \mathbb{R}^+$

y est une solution polynomiale si et seulement si

$\begin{cases} \lambda+n \in \mathbb{N} \\ -\lambda \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+n \in \mathbb{N} \\ \lambda \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda+n \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq -n \\ \lambda \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lambda \in \{-n, -(n-1), \dots, -1, 0\}$

4) D'après 3/ si λ v.p. de U alors $\lambda \in \{-n, -(n-1), \dots, -1, 0\}$

D'autre part si $\lambda \in \{-n, -(n-1), \dots, -1, 0\}$

$\exists P = \frac{(x-1)^{\lambda+n}}{x^\lambda}$ qui vérifie $U(P) = \lambda P$
 $\Rightarrow \lambda$ v.p. de U .

Ainsi $Sp(U) = \{-n, -(n-1), \dots, -1, 0\}$

Exercice 4

1) $Sp(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

tg $f(x) = \lambda x$

Soit $D = \text{vect}(x) =$ droite vectorielle.

$f(D) \subset D$

reciproquement si $D = \text{vect}(x)$ ($x \neq 0$)
 et $f(D) \subset D \Rightarrow f(x) \in D \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$

tg $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \lambda$ v.p. de f

$\Rightarrow Sp(f) \neq \emptyset$

2) Si $Sp(f) = \emptyset$

a) $A = \text{Mat}(f, B) \in M_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$, alors $\chi_A = \dots$

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$ tg $\chi_A(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}$ tg λ v.p. de $A \Leftrightarrow$

$\exists Z \in M_n(\mathbb{C})$ tg $AZ = \lambda Z$
 $Z \neq 0$

b) Soit $Z = x + iy$ avec $x, y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

On a $AZ = \lambda Z \Leftrightarrow A(x + iy) = \lambda(x + iy)$

On pose $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Alors $A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$
 $= \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \alpha y + \beta x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \alpha x - \beta y \\ f(y) = \alpha y + \beta x \end{cases}$

On pose $P = \text{vect}(x, y)$.
 $\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in P \\ \text{et } f(y) \in P \end{cases} \Rightarrow f(P) \subset P$
 $\Rightarrow P$ stable par f .

Exercice 5.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0_{n,1}$ un vecteur propre
 associée à $\lambda \Leftrightarrow AX = \lambda X$.
 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq 0_{n,1}$ tq $AY = \mu Y$.
 $\downarrow \pi_{xy} = X^t Y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (\pi_{xy})_{ij} = x_i y_j$
 Comme $X \neq 0 \Rightarrow \exists i_0$ tq $x_{i_0} \neq 0$
 $Y \neq 0 \Rightarrow \exists j_0$ tq $y_{j_0} \neq 0$
 $\Rightarrow (\pi_{xy})_{i_0 j_0} \neq 0 \Rightarrow \pi_{xy} \neq 0_{n,n}$
 $\downarrow$ Soit $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \text{Sp}(A)$ tq

$\alpha = \lambda - \mu$.
 $\Rightarrow \exists X \neq 0$ tq $AX = \lambda X$
 $\exists Y \neq 0$ tq $AY = \mu Y$.

D'après 1/ $\pi_{xy} \neq 0_{n,n}$.

$$\Phi(\pi_{xy}) = A\pi_{xy} - \pi_{xy}A$$

$$= AX^t Y - X^t Y A = \lambda X^t Y - X^t Y A$$

$$\text{Or } \begin{cases} A \text{ est symétrique.} \\ \text{et } AY = \mu Y \end{cases} \Rightarrow Y^t A = \mu^t Y$$

$$\text{D'où } \Phi(\pi_{xy}) = \lambda X^t Y - \mu X^t Y$$

$$= (\lambda - \mu) \pi_{xy} = \alpha \pi_{xy}$$

$\Rightarrow \alpha$ v.p. de $\Phi \Rightarrow \mu \subset \text{Sp}(\Phi)$
 $\downarrow \pi \in \text{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\pi \neq 0_{n,n}$ et $\Phi(\pi) = \alpha \pi$.
 Supp. $\vec{v}, \vec{z}, \vec{v}_p$ de A , on a $\pi \vec{z} = 0$
 $\Rightarrow \pi v_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$
 Comme $(v_1, \dots, v_n)$ base de $\text{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow \pi X = 0 \forall X \in \text{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Alors $\pi = 0_{n,n}$ imp.

$\subseteq \exists \vec{z}_0 \vec{v}_p$ de A tq $\pi \vec{z}_0 \neq 0$

$\downarrow \vec{z}_0 \vec{v}_p$ de $A \Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}$ tq $A \vec{z}_0 = \mu \vec{z}_0$
 $\pi \vec{v}_p$ de $\Phi \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ tq $\Phi(\pi) = \alpha \pi$.

$$\Leftrightarrow A\pi - \pi A = \alpha \pi$$

$$\Rightarrow A\pi \vec{z}_0 - \pi A \vec{z}_0 = \alpha \pi \vec{z}_0$$

$$\Rightarrow A\pi \vec{z}_0 - \pi \mu \vec{z}_0 = \alpha \pi \vec{z}_0$$

$$A\pi \vec{z}_0 = (\alpha + \mu) \pi \vec{z}_0$$

Comme $\pi \vec{z}_0 \neq 0 \Rightarrow \pi \vec{z}_0 \vec{v}_p$ de A associée à $\alpha + \mu$.

(3)

5) D'après 4), si d.v.p de Φ

Exercice.

1) cours.

2) soit $I = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{la famille } (x, u(x), \dots, u^{k-1}(x)) \text{ est libre}\}$

$I \subset \mathbb{N}^n$

$I \neq \emptyset$ car (x) libre $\Rightarrow k=1 \in I$.
 $\forall k \in I; k \leq n = \dim E \Rightarrow I$ est majoré.

Ainsi I admet un maximum.

On pose $p = \max I$. D'où $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.

$(x, u(x), \dots, u^p(x))$ est liée. $\Rightarrow$

$u^p(x) \in \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.

3) soit $F_x = \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.
 $\forall 0 \leq k \leq p-1, u(u^k(x)) = u^{k+1}(x) \in F_x$.
 $u(u^{p-1}(x)) = u^p(x) \in F_x$

$\Rightarrow F_x$ est stable par u .

4) a) soit $\tilde{U} = U|_{F_x}$ l'endomorphisme induit par u sur F_x

On a $B_x = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une base de F_x .

$$\text{Mat}(\tilde{U}, B_x) = \begin{pmatrix} 0 & & & a_p \\ 1 & & & a_{p-1} \\ & \ddots & & \\ & & 0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ u(x) \\ \vdots \\ u^{p-1}(x) \end{matrix}$$

On a

$u^p(x) \in \text{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$

Il existe $a_0, \dots, a_{p-1} \in K$ tq.

$$u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$$

$$\chi_{\tilde{U}}(x) = \det(xI_p - \Pi)$$

$$= \begin{vmatrix} x & 0 & & 0 \\ -1 & & & -a_0 \\ 0 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 0 & -x - a_{p-1} \end{vmatrix}$$

$$= x^p - a_{p-1} x^{p-1} - \dots - a_0 \quad (\text{voir matrice Compagnon})$$

$$\chi_u(u)(x) = u^p(x) - a_{p-1} u^{p-1}(x) - \dots - a_0 x = 0$$

car $u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$.

$$\Rightarrow \chi_u(u)(x) = 0.$$

D'après ce qui précède.

$$\forall x \neq 0_E: \chi_u(u)(x) = 0_E.$$

$$\Rightarrow \forall x \in E; \chi_u(u)(x) = 0_E$$

$$\Rightarrow \underline{\chi_u(u) = 0}.$$

Exercice 1

$$\forall \pi \in \pi_n(\mathbb{R}); \quad U(\pi) = \pi + b(\pi) I_n.$$

$$\begin{aligned} \downarrow \quad U^2(\pi) &= U(U(\pi)) = U(\pi) + b(\pi) U(I_n) \\ &= \pi + b(\pi) I_n + b(\pi) (\pi + n I_n) \\ &= \pi + b(\pi) I_n + (n+1) I_n b(\pi) \\ &= \pi + (n+2) b(\pi) I_n \\ &= (n+2) (\pi + b(\pi) I_n) - (n+1) \pi \\ &= (n+2) U(\pi) - (n+1) \pi, \quad \forall \pi \in \pi_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } U^2 = (n+2)U - (n+1)\text{Id}_E$$

2) Si λ est une VP de U , alors:

$$\lambda^2 - (n+2)\lambda + (n+1) = 0$$

Car $P(X) = X^2 - (n+2)X + n+1$ est un poly annulateur de U .

$$\Delta = (n+2)^2 - 4(n+1) = n^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{n+2-n}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{n+2+n}{2} = n+1$$

De plus on a $U(I_n) = (n+1)I_n \Rightarrow (n+1)VP$ de U

$$E_{n+1} = \{ \pi \in \pi_n(\mathbb{R}) \mid U(\pi) = (n+1)\pi \}$$

$$\pi \in E_{n+1} \Leftrightarrow \pi + b(\pi) I_n = (n+1)\pi$$

$$\Leftrightarrow b(\pi) I_n = n\pi$$

$$\Leftrightarrow \pi = \frac{b(\pi)}{n} I_n$$

$$\Rightarrow E_{n+1} = \text{Vect}(I_n).$$

$$\pi \in E_1 \Leftrightarrow U(\pi) = \pi \Leftrightarrow \pi + b(\pi) I_n = \pi$$

$$\Leftrightarrow b(\pi) I_n = 0 \Leftrightarrow b(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow E_1 = \{ \pi \in \pi_n(\mathbb{R}) \mid b(\pi) = 0 \} \neq \{0\}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ VP}$$

3) On a $P(X) = (X-1)(X-(n+1))$ est un poly annulateur de U scindé et a racines simples, d'où U est diagonalisable.

4) Puisque U est diag, alors

$$\dim E_1 = \text{mul}(1) \text{ et } \dim E_{n+1} = \text{mul}(n+1) \\ \text{et } X_U \text{ est scindé.}$$

$$E_1 \text{ est un hyperplan} \Rightarrow \dim E_1 = n-1$$

$$\Rightarrow n+1 \text{ VP simple.}$$

$$\text{Alors } X_U(X) = (X-(n+1))(X-1)^{n-1}.$$

Exercice 2

$$C(A) = \{ \pi \in \pi_n(\mathbb{K}) \mid A\pi = \pi A \}$$

$$\downarrow \quad C(A) \subset \pi_n(\mathbb{K})$$

$$\circ \quad 0_n \in C(A)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \pi, N \in C(A), \lambda\pi + N \in C(A)$$

$$\text{Car } (\lambda\pi + N)A = \lambda\pi A + NA$$

$$= \lambda A\pi + AN$$

$$= A(\lambda\pi + N)$$

2) soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$
 $\pi = (m_{ij}) \in C(A) \Leftrightarrow \pi A = A \pi$

$$\Leftrightarrow (\pi A)_{ij} = (A \pi)_{ij} \quad \forall i, j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n m_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} m_{kj}$$

$$\Rightarrow m_{ij} \lambda_j = \lambda_i m_{ij}$$

$$\Leftrightarrow m_{ij} (\lambda_j - \lambda_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\forall i \neq j} \quad m_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi = \text{diag}(m_{11}, \dots, m_{nn})$$

$$\Leftrightarrow \pi \in D_n(K)$$

$$\text{Ainsi } C(A) = D_n(K)$$

3) $A = \text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$.

on écrit π sous forme bloc. c.à.d.

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \dots & \pi_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \pi_{r1} & \dots & \pi_{rr} \end{pmatrix} \text{ avec } \pi_{ij} \in M_{n_i \times n_j}(K)$$

un calcul par bloc. comme question 2/ donne
 $\pi_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$

$$\text{D'où } C(A) = \left\{ \pi = \text{diag}(\pi_{11}, \dots, \pi_{rr}), \text{ avec } \pi_{kk} \in M_{n_k}(K) \right\}$$

4) A est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$ tq.

$$A = P \underbrace{\text{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})}_{D} P^{-1}$$

$$\pi \in C(A) \Leftrightarrow \pi A = A \pi$$

$$\Leftrightarrow P D P^{-1} \pi = \pi P D P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow D P^{-1} \pi = P^{-1} \pi P D P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow P P^{-1} \pi P = P^{-1} \pi P D$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} \pi P \in C(D)$$

soit $f: C(A) \rightarrow C(D)$

$$\pi \mapsto f(\pi) = P^{-1} \pi P$$

f linéaire

$$\forall N \in C(D) \exists ! \pi \in C(A) \text{ tq } f(\pi) = N$$

$$\text{car } P^{-1} \pi P = N \Leftrightarrow \pi = P N P^{-1}$$

$\Rightarrow f$ bijective.

$\Rightarrow f$ est un isomorphisme.

$$\Rightarrow \dim C(A) = \dim C(D)$$

$$\text{or } \dim C(D) = \dim (\pi_{11} \times \pi_{22} \times \dots \times \pi_{rr})$$

$$= \sum_{k=1}^r \dim \pi_{kk}$$

$$= \sum_{k=1}^r n_k$$

$$\Rightarrow \dim C(A) = \sum_{k=1}^r n_k$$

comme A est diagonalisable, alors

$$\dim E_{\lambda_k} = \text{mult}(\lambda_k) = n_k$$

$$\Rightarrow \dim C(A) = \sum_{k=1}^r n_k = \sum_{k=1}^r (\dim E_{\lambda_k})$$

$$b) \forall k \in \{1, \dots, r\}; n_k \geq n_k$$

$$\Rightarrow \dim C(A) \geq \sum_{k=1}^r n_k = n$$

(Puisque A est diagonalisable)

Exercice 3

$$\Phi: E \rightarrow E$$

$$f \mapsto \Phi(f) = g, x \mapsto \begin{cases} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} & x \neq 0 \\ g(0) = f(0) \end{cases}$$

1) soit $f_1, f_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Phi(\lambda f_1 + f_2)(x) = \frac{\int_0^x (\lambda f_1 + f_2)(t) dt}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$= \frac{\lambda \int_0^x f_1(t) dt}{x} + \frac{\int_0^x f_2(t) dt}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$= (\lambda \Phi(f_1) + \Phi(f_2))(x)$$

$$\Phi(\lambda f_1 + f_2)(0) = (\lambda f_1 + f_2)(0) = \lambda f_1(0) + f_2(0)$$

$$= (\lambda \Phi(f_1) + \Phi(f_2))(0)$$

$$\Rightarrow \Phi(\lambda f_1 + f_2) = \lambda \Phi(f_1) + \Phi(f_2)$$

$\Rightarrow \Phi$ linéaire.

• soit $f \in E \Rightarrow f$ continue sur $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow x \mapsto \int_0^x f(t) dt \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x \mapsto \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} \quad \text{" " } \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \text{ avec}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = F'(0) = f(0) = g(0)$$

$\Rightarrow g$ continue sur $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \forall f \in E; \Phi(f) \in E.$$

$\Rightarrow \Phi$ endomorphisme.

2) soit λ v.p. de $\Phi \Rightarrow \exists f \neq 0$ tq $\Phi(f) = \lambda f$

$$\Rightarrow \forall x \neq 0; \int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = \lambda x F'(x) \quad (F(x) = \int_0^x f(t) dt)$$

$$\text{• si } \lambda = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ imp}$$

$\Rightarrow 0$ n'est pas v.p. de Φ .

$$\text{• si } \lambda \neq 0, \text{ alors } F(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{x} F(x), \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \alpha e^{\frac{1}{\lambda} \ln|x|} = \alpha x^{\frac{1}{\lambda}}, \forall x > 0$$

$$\text{D'où } \begin{cases} F(x) = \alpha x^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si } x > 0 \\ F(x) = \beta (-x)^{\frac{1}{\lambda}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}-1} & \forall x > 0 \\ \frac{\beta}{\lambda} (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} & \forall x < 0 \end{cases}$$

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) < \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha}{\lambda} x^{\frac{1}{\lambda}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\beta}{\lambda} (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1} < \infty$$

Alors $\frac{1}{\lambda} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda - 1}{\lambda} \geq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{0 < \lambda \leq 1}$ les seuls λ possible de Φ .

Réciproquement

• si $\lambda \in]0, 1[\Rightarrow \exists f \neq 0$ continue sur $\mathbb{R}$
 donnée par $f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot x^{\frac{1}{\lambda} - 1} & \text{si } x > 0 \\ \beta \cdot (-x)^{\frac{1}{\lambda} - 1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$
 vérifie $\Phi(f) = \lambda f$

• si $\lambda = 1 \Rightarrow \exists f = \alpha \neq 0$ tel que $\Phi(f) = f$

Problème

1) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ tq A vérifie

$$ST > 0. \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$; Alors

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

$$\Rightarrow AX = X \Rightarrow 1. \text{vp de } A.$$

2) a) $X \neq 0$; $|x_k| = \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$

$$\Rightarrow x_k \neq 0$$

$$BX = 0 \Rightarrow (BX)_k = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n b_{kj} x_j = 0$$

$$\Rightarrow b_{kk} x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n b_{kj} x_j$$

$$\Rightarrow |b_{kk}| |x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |b_{kj} x_j| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |b_{kj}| |x_k|$$

$$\xRightarrow{x_k \neq 0} |b_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |b_{kj}|.$$

b) Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas inversible $\Rightarrow \exists X \neq 0$ tq $(A - \lambda I_n)X = 0$

d'après e) $\exists 1 \leq k \leq n$ tq $|a_{kk} - \lambda| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{ij}|$

$$\Rightarrow |a_{kk} - \lambda| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} - a_{kk} = 1 - a_{kk}$$

$$\text{puisque } |a_{kk} - \lambda| \leq 1 - a_{kk}$$

$$\Rightarrow -a_{kk} + |\lambda| \leq 1 - a_{kk} \Rightarrow |\lambda| \leq 1$$

2) $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ avec $|\lambda| = 1 \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}$ tq

$$\lambda = e^{i\theta}$$

$$|a_{kk} - e^{i\theta}| \leq 1 - a_{kk} \Rightarrow |a_{kk} - e^{i\theta}|^2 \leq (1 - a_{kk})^2$$

$$\Rightarrow (a_{kk} - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta \leq 1 - 2a_{kk} + a_{kk}^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq a_{kk}^2 - 2a_{kk} \cos \theta + 1 \leq 1 - 2a_{kk} + a_{kk}^2$$

$$a_{kk} \cos \theta \geq a_{kk}$$

$$\Rightarrow \cos \theta \geq 1 \quad (\text{car } a_{kk} > 0)$$

$$\text{D'où } \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 2p\pi; p \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

3) On a $1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow \det(A - 1I_n) = 0$

$$\Rightarrow \det({}^t A - I_n) = 0 \Rightarrow 1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}({}^t A)$$

$$\dim E_1(A) = \dim \ker(A - I_n) = n - \text{rg}(A - I_n)$$

$$= n - \text{rg}({}^t A - I_n)$$

$$= \dim \ker({}^t A - I_n)$$

$$= \dim E_1({}^t A)$$

b) Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0$ tq ${}^t A V = V$.

Alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}; ({}^t A V)_i = v_i$

$$\Rightarrow |v_i| \leq \sum_{j=1}^n |({}^t A)_{ij} v_j|$$

$$\Rightarrow |v_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{ji} |v_j|, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Supposons qu'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tq

$$|v_k| < \sum_{j=1}^n a_{jk} |v_j|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=1}^n |v_k| &< \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{jk} |v_j| \\ &< \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} \right) |v_j| \\ &< \sum_{j=1}^n |v_j| \text{ imp.} \end{aligned}$$

Alors $\forall i \in \{1, \dots, n\}; v_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} v_j$

$$\text{§) } |V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix}$$

$$({}^t A \cdot |V|)_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} |v_j| \stackrel{b)}{=} |v_i|$$

$$\Rightarrow {}^t A \cdot |V| = |V|$$

Comme $V \neq 0 \Rightarrow \exists p \in \{1, \dots, n\}$ tq $v_p \neq 0 \Rightarrow |v_p| > 0$

après a) $|v_i| = \sum_{j=1}^n |a_{ji}| |v_j|$

$$= \sum_{j \neq p} |a_{ji}| |v_j| + |a_{pi}| |v_p|$$

$$\Rightarrow |v_i| > 0$$

$$\text{§) } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in E_1({}^t A)$$

$$Z = X - \frac{x_1}{y_1} Y \in E_1({}^t A)$$

Supp que $Z \neq 0$. D'après e-c) $|z_i| > 0$

$$\Rightarrow z_i \neq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

ou $z_i = 0$ Contradiction. D'où $Z = 0$.

$$\Rightarrow X = \frac{x_1}{y_1} Y \Rightarrow \dim E_1({}^t A) = 1$$

$$\Rightarrow E_1({}^t A) = \text{vect}(X)$$

D'après 2-c) puisque si X vp de ${}^t A$, alors

$\forall l$ vp de ${}^t A$ et $|v_i| > 0$

Alors on peut supposer que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $x_i \neq 0$

On pose $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ avec $w_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$

$\Rightarrow$ un vecteur propre de A . et $E_1(A) = \text{vect}(W)$

$$w_i > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n w_i = 1$$

$\Rightarrow$ d'après y) $\dim E_1(A) = \dim E_1({}^t A) = 1$

$$\text{§) } N: \begin{matrix} \Pi_{\mathcal{M}}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longrightarrow & N(X) = \sum_{i=1}^n w_i |x_i| \end{matrix}$$

$$\text{si } N(X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n w_i |x_i| = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}; \underbrace{w_i |x_i| = 0}_{w_i > 0} \Rightarrow |x_i| = 0 \Rightarrow x_i = 0$$

$$\Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}}$$

$$\text{Soit } \lambda \in \mathbb{C}; N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$$

$$\text{Soient } X, Y \in \Pi_{\mathcal{M}}(\mathbb{C}); N(X+Y) = \sum_{i=1}^n w_i |x_i + y_i|$$

(40)

$$\leq \sum_{i=1}^n w_i |x_i| + \sum_{i=1}^n w_i |y_i|$$

$$\leq N(X) + N(Y)$$

$\Rightarrow N$ est une norme sur $\Pi_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$b) N(AX) = \sum_{i=1}^n w_i |(AX)_i|$$

$$= \sum_{i=1}^n w_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i a_{ij} |x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n w_i a_{ij} \right)}_{w_j} |x_j|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n w_j |x_j| = N(X)$$

c) soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow \exists X \neq 0$ tq $AX = \lambda X$

$$\Rightarrow N(AX) = |\lambda| N(X)$$

$$\text{ou } N(AX) \leq N(X) \Rightarrow |\lambda| N(X) \leq N(X)$$

com. $X \neq 0 \Rightarrow N(X) \neq 0$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq 1$$

$$d) \Phi: \Pi_{n,1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

$$e) \Phi(AX) = \sum_{i=1}^n w_i (AX)_i = \sum_{i=1}^n w_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \right)}_{w_j} x_j = \sum_{j=1}^n w_j x_j = \Phi(X)$$

Φ forme linéaire

soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ et vérifie

$$\Phi(U) = \sum_{i=1}^n w_i = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \Phi$ forme linéaire non nulle

$\Rightarrow \ker \Phi$ est un hyperplan.

Alors $\Pi_{n,1}(\mathbb{C}) = \text{vect}(U) \oplus \ker \Phi$.

Comme $U \in E_1(A)$ et $\dim E_1(A) = 1$

$$\Rightarrow E_1(A) = \text{vect}(U)$$

$$\Rightarrow \Pi_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \ker(\Phi)$$

f) $x \in E_{\lambda}(A)$ tq $\lambda \neq 1$.

$$\Downarrow AX = \lambda X \rightarrow \Phi(AX) = \Phi(\lambda X)$$

$$\Phi(X) = \lambda \Phi(X)$$

$$\Rightarrow \frac{(\lambda - 1) \Phi(X)}{\lambda \neq 1} = 0 \Rightarrow \Phi(X) = 0$$

$$\Rightarrow E_{\lambda}(A) \subset \ker \Phi.$$

g) $f: X \mapsto AX$

$$x \in \ker \Phi \Leftrightarrow \Phi(x) = 0$$

$$\Phi(f(x)) = \Phi(AX) = \Phi(x) = 0$$

$\Rightarrow \ker \Phi$ stable par f .

$$(i) \quad f: \Pi_n(\mathbb{C}) \rightarrow \Pi_n(\mathbb{C})$$

$$x \mapsto Ax$$

ma $E_\lambda(A)$ est stable par f
 et $\ker \Phi$ " " par f

$$\Pi_{n_1}(\mathbb{C}) = E_\lambda(A) \oplus \ker \Phi$$

on pose $f_\lambda: E_\lambda(A) \rightarrow E_\lambda(A)$ l'endomorphisme induit par f sur $E_\lambda(A)$
 $\tilde{f}: \ker \Phi \rightarrow \ker \Phi$ " " " sur $\ker \Phi$

$\Rightarrow \exists B$ base de $\mathbb{C}^n$

$$\text{mat}(f, B) = \begin{pmatrix} \text{mat}(f_\lambda, B_\lambda) & 0 \\ 0 & \text{mat}(\tilde{f}, \tilde{B}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \text{mat}(\tilde{f}, \tilde{B}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_f(x) = (x - \lambda) \chi_{\tilde{f}}(x)$$

Supp Annule de $\chi_{\tilde{f}} \Rightarrow \exists v_p$ de $\tilde{p}$

$$\Rightarrow \exists x \neq 0 (x \in \ker \Phi) \text{ tq } \begin{cases} \tilde{f}(x) = \lambda x \\ f(x) = \lambda x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Ax = \lambda x$$

$$\Rightarrow x \in \ker \Phi \cap E_\lambda(A) \Leftrightarrow x \in E_\lambda(A)$$

$\Rightarrow \lambda$ vp simple de A