

Correction Série Réduction

Exercice 1

$U \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E < \infty$.

1) Montrons le résultat par récurrence.

Pour $n=1$, le résultat est vérifié.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, n op. e.a.e. $\neq$.

Supposons que $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe.

Montrons que si $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ sont des vp e.a.e. $\neq$, alors $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_{n+1}}$ sont en somme directe.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \dots \times E_{\lambda_{n+1}}$

$$\text{t.q. } x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = 0 \in E \quad (1)$$

$$\text{alors } U(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}) = U(0_E) = 0_E$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0_E \quad (2)$$

$$(2) - \lambda_{n+1} (1) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_{n+1})x_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_{n+1})x_n = 0_E$$

$$\text{or } x_i \in E_{\lambda_i} \Rightarrow (\lambda_i - \lambda_{n+1})x_i \in E_{\lambda_i}$$

et par hyp de Récurrence

$E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe

$$\Rightarrow (\lambda_i - \lambda_{n+1})x_i = 0; \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow x_i = 0_E \text{ car } \lambda_{n+1} \neq \lambda_i; \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$(1) \Rightarrow x_{n+1} = 0_E$$

$$\text{car } E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_n} = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_n}$$

b) Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ des vecteurs propres associés à des v.p. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e.a.e. $\neq$.

Alors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre.

$$\text{Soit } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \text{ t.q. } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0_E$$

$$x_i \in E_{\lambda_i} \Rightarrow \alpha_i x_i \in E_{\lambda_i}$$

or d'après a) $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_n}$ sont en somme directe

$$\text{alors } \alpha_i x_i = 0_E; \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \text{ (car } x_i \neq 0_E)$$

$\Rightarrow$ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre.

c) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp de U e.a.e. $\neq$.

alors la famille $F = (x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs propres associés forme une famille libre dans E .

(1)

$$\Rightarrow \text{Card}(F) \leq \dim E$$

$$\Leftrightarrow p \leq \dim E \Leftrightarrow \text{Card}(Sp(U)) \leq \dim E$$

2) Soit d.v.p de D.

$$\text{Pq. } 1 \leq \dim E_\lambda \leq \text{mul}(\lambda)$$

On a d.v.p de U $\Rightarrow \exists x \neq 0_E$ l.g. $U(x) = \lambda x$

$$\Leftrightarrow E_\lambda \neq \{0_E\} \Rightarrow \dim E_\lambda \geq 1.$$

D'autre part on a $E_\lambda = \ker(U - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par U. On pose U_λ l'endomorphisme

$$\text{par } U \text{ a } E_\lambda \Leftrightarrow U_\lambda: E_\lambda \rightarrow E_\lambda.$$

On pose $B_\lambda = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $E_\lambda \Leftrightarrow$

$$\dim E_\lambda = p \Rightarrow \text{Mat}(U_\lambda, B_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \chi_{U_\lambda}(x) = (x - \lambda)^p$$

$$= (x - \lambda)^{\dim E_\lambda}$$

$$\text{On a } \chi_{U_\lambda} \text{ divise } \chi_U$$

$$(x - \lambda)^{\dim E_\lambda} \text{ divise } \chi_U(x) = (x - \lambda)^{\text{mul}(\lambda)} \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \dim E_\lambda \leq \text{mul}(\lambda).$$

Exercice 2. $n \geq 2$

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \text{ l.g. } \text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}; f(e_i) = e_{i+1}$ (d'après la matrice)
et $f(e_n) = e_1$.

2) Démontrer que $f^n = \text{Id}_E$.

$$\text{Pq. } \forall k \in \{1, \dots, n-1\}; f^k(e_1) = e_{k+1}$$

$$\text{et } f^n(e_1) = e_1.$$

Pour $k=1$; $f(e_1) = e_2$, le résultat est vrai.

Soit $k \in \{1, \dots, n-2\}$, supposons que

$$f^k(e_1) = e_{k+1}, \text{ et montrons que } f^{k+1}(e_1) = e_{k+2}.$$

$$\text{On a. } f^{k+1}(e_1) = f(f^k(e_1)) \stackrel{1+k}{=} f(e_{k+1}) = e_{k+2}.$$

Ainsi, $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}; f^k(e_1) = e_{k+1}$.

$$\text{De plus } f^n(e_1) = f(f^{n-1}(e_1)) = f(e_1) = e_1.$$

$$\Rightarrow \underline{f^n(e_1) = e_1}.$$

$$k \in \{1, \dots, n\};$$

$$f^n(e_k) = f^n(f^{k-1}(e_1)) = f^{k-1}(f^n(e_1))$$

$$= f^{k-1}(e_1) = e_k$$

$$\underline{f^n(e_k) = e_k}$$

Comme $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{E}^n$ et $f^n(e_k) = e_k$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, alors

$$\underline{f^n = \text{Id}_{\mathbb{E}}}$$

3) Soit $P(x) = x^n - 1$.

D'après e) P est un poly annulateur de f .
Comme $P(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \lambda_k)$ avec $\lambda_k = e^{i \frac{2\pi k}{n}}$

$\Rightarrow P$ est scinde' et a racines simples
D'où f est diagonalisable.

4) On a P est un poly annulateur de f .

Alors $\text{Sp}_K(f) \subset \{ \text{racines de } P \}$
 $\subset \{ \lambda_k; k \in \{0, \dots, n-1\} \}$

D'autre part :

On considère $x \in \mathbb{C}^n$ tq $f(x) = \lambda_k x$
 $\Leftrightarrow AX = \lambda_k X$ avec $X = \text{Mat}(I, B) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \lambda_k x_1 \\ x_1 = \lambda_k x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda_k x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_n = \lambda_k x_1 & \text{vérifier} \\ x_1 = \lambda_k^{n-1} x_n \\ x_{n-3} = \lambda_k^3 x_n \\ x_{n-2} = \lambda_k^2 x_n \\ x_{n-1} = \lambda_k x_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = x_n \begin{pmatrix} \lambda_k^{n-1} \\ \lambda_k^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda_k \\ 1 \end{pmatrix} = v_k$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_k} = \text{vect}(v_k); v_k \neq 0.$$

$$\Rightarrow \lambda_k v_p \text{ et } \dim E_{\lambda_k} = 1; \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$$

c) Puisque f est diagonalisable, alors

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^n E_{\lambda_k}$$

Comme $E_{\lambda_k} = \text{vect}(v_k)$, alors
 $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée des vecteurs propres de f .

$$\text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Mat}(f, B_C) = P_{B \rightarrow B_C} \text{Mat}(f, B) \cdot P_{B \rightarrow B_C}^{-1}$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$5) T(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$T(A) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i P D^i P^{-1} = P \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i \right) P^{-1}$$

D diagonale $\rightarrow P(D)$ diagonale

$\Rightarrow T(D)$ est diagonalisable.

$$6) \Phi: \Gamma_n(\mathbb{C}) \rightarrow \Gamma_n(\mathbb{C})$$

$$M \mapsto \Phi(M) = -M + \text{tr}(M) \cdot A$$

$$a) \lambda \text{ v.e. de } \Phi \Leftrightarrow \exists M \neq 0 \text{ t.q. } \Phi(M) = \lambda M$$

$$\Leftrightarrow -M + \text{tr}(M) \cdot A = \lambda M$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}(M) A = (\lambda + 1) M$$

$$\Rightarrow \text{tr}(M) \underbrace{\text{tr}(A)}_6 = (\lambda + 1) \text{tr}(M)$$

$$\Rightarrow (\lambda + 1) \text{tr}(M) = 0$$

si $\text{tr}(M) = 0$, en remplaçant

ans(*), on obtient $-M = \lambda M$

$$\Rightarrow (\lambda + 1) M = 0$$

or $M \neq 0$, d'où $\lambda = -1$

si $\text{tr}(M) \neq 0$, on obtient $\lambda = -1$

$$\text{Ainsi } \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi) \subset \{-1\}$$

comme $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi) \neq \emptyset$; alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Phi) = \{-1\}$

b) Supposons que Φ est diagonalisable

alors $\exists B$ base de $\Gamma_n(\mathbb{C})$ t.q. $\text{Mat}(\Phi, B) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = -I_n$

$\Rightarrow \Phi = -\text{Id}_{\Gamma_n(\mathbb{C})}$ ce qui est absurde.

$$7) \text{ On a } \Phi^2(M) = \Phi(\Phi(M))$$

$$a) = \Phi(-M + \text{tr}(M) \cdot A)$$

$$= -\Phi(M) + \text{tr}(M) \cdot \Phi(A)$$

$$= M - \text{tr}(M) A + \text{tr}(M) (-A + \text{tr}(A) \cdot A)$$

$$= M - 2 \text{tr}(M) \cdot A$$

$$= -2(-M + \text{tr}(M) A) - M$$

$$= -2\Phi(M) - M$$

$$\Leftrightarrow \Phi^2(M) + 2\Phi(M) + M = 0$$

$\Rightarrow P(x) = x^2 + 2x + 1$ est un polynôme annulateur de Φ .

b) On a $P(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, poly annulateur de Φ

(4)

alors le polynôme minimal de Φ est

p_{Φ} divise $P \Leftrightarrow$

$$p_{\Phi}(x) = (x-1) \text{ ou } p_{\Phi}(x) = (x-1)^2$$

Supposons que $p_{\Phi}(x) = x-1 \Rightarrow \Phi - \text{Id} = 0$

$$\downarrow$$

$$\Phi = \text{Id}$$

$$\Rightarrow p_{\Phi}(x) = (x-1)^2$$

$\Rightarrow$ Puisque p_{Φ} le polynôme minimal n'est pas à racines simples

$\Rightarrow \Phi$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 8

1) Soit $S = {}^t A \cdot A$, avec $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow {}^t S = {}^t ({}^t A A) = {}^t A A = S \Rightarrow S \in S_n(\mathbb{R})$$

2) Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$:

$${}^t X \cdot {}^t A \cdot A X = {}^t (A X) \cdot A X = {}^t Y \cdot Y \text{ avec}$$

$$Y = A X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$${}^t X \cdot {}^t A \cdot A X = \sum_{k=1}^n y_k^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow {}^t A \cdot A \in S_n^+(\mathbb{R})$$

b) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

d'après a) ${}^t A \cdot A \in S_n^+(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \{0\} \quad {}^t X \cdot {}^t A \cdot A X \geq 0$$

$$\text{Supposons } {}^t X \cdot {}^t A \cdot A X = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0$$

$$\text{avec } A X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow y_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\downarrow y_i = 0 \dots$$

$$\Rightarrow A X = 0$$

Comme A est inversible, alors $X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$

$$\Rightarrow {}^t X \cdot {}^t A \cdot A X > 0, \forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \{0\} \quad \text{min}$$

$$\Leftrightarrow {}^t A \cdot A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$$

e) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ tq ${}^t X \cdot S \cdot X = 0, \forall X$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S) \Rightarrow \exists X_0 \neq 0$ tq

$${}^t X_0 \cdot S \cdot X_0 = 0 \Leftrightarrow {}^t X_0 \cdot \lambda X_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \cdot {}^t X_0 \cdot X_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{Car } X_0 \neq 0$$

Puisque $S \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$
 tq $S = {}^t P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot P = \square$
 $\Rightarrow S = \square$.

3/a) " $\Rightarrow$ " hyp $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}$
 soit $\lambda \in Sp(S) \Rightarrow \exists X_0 \neq 0$ tq
 $SX_0 = \lambda X_0 \Rightarrow {}^t X_0 S X_0 = \lambda {}^t X_0 X_0$
 $\Rightarrow \lambda \cdot {}^t X_0 X_0 \geq 0$
 $\Leftrightarrow \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq 0$
 $\Rightarrow \underline{Sp(S) \subset \mathbb{R}_+}$

" $\Leftarrow$ " soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ tq $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$
 alors, d'après le résultat admet
 $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $S = {}^t P \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot P$
 $\Rightarrow S = \underbrace{{}^t P \cdot \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})}_{\substack{{}^t A \\ A}} \cdot \underbrace{\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})}_A \cdot P$

$\Rightarrow S = {}^t A \cdot A$ avec $A = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot P$
 d'après 1.a) $S \in S_n^+(\mathbb{R})$

b) $\Pi q S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$
 " $\Rightarrow$ " soit $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow S \in S_n^+(\mathbb{R})$
 a) $\Rightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$
 si $0 \cdot v_p$ de $S \Rightarrow \exists X_0 \neq 0$ tq
 $SX_0 = 0 \Leftrightarrow {}^t X_0 S \cdot X_0 = 0$ car $S \in S_n^+$

$\Rightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$
 " $\Leftarrow$ " hyp $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$
 d'après ce qui précède $S = {}^t A \cdot A$
 avec $A = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot P$
 • $P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ inversible.
 • $\forall \lambda_i, \lambda_i \neq 0 \Rightarrow \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \in GL_n(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$
 D'après 1.b) $\underbrace{{}^t A A}_S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

4) $S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$
 d'après 3/
 b) $\Rightarrow$ c) $\exists \Pi = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \cdot P \in GL_n(\mathbb{R})$
 tq ${}^t \Pi \Pi = S$
 c $\Rightarrow$ d d'après 1. b
 d $\Rightarrow$ b/ $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et S inversible $\Rightarrow 0 \notin Sp(S)$
 $\Rightarrow Sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(X-A) \cdot \det(X-C) \\ &= \det(X - \pi(U_F, B_F)) \cdot \det(X-C) \\ &= \chi_{U_F} \cdot \det(X-C) \end{aligned}$$

Ainsi χ_{U_F} divise χ_U .

Exercice 2

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_B(X) = \det(X-B) = \begin{vmatrix} X-0 & -3 & -2 \\ 2 & X-5 & -2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\Rightarrow \chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 2-X & 0 \\ 2 & X-5 & -2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & X-5 & -2 \\ -2 & 3 & X \end{vmatrix}$$

$$C_2 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & X-3 & -2 \\ -2 & 1 & X \end{vmatrix}$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} X-3 & -2 \\ 1 & X \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= (X-2) \begin{vmatrix} X-1 & -2 \\ 1-X & X \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (X-2)(X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & X \end{vmatrix} \\ &= (X-2)(X-1)(X-2) \end{aligned}$$

$$\chi_B(X) = (X-2)^2(X-1)$$

On détermine les sous-espaces propres.

$$E_2 = ??$$

$$\text{Soit } X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow BX = 2X$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 2z = 2x \\ 2x + 5y + 2z = 2y \\ 2x - 3y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ① -2x + 3y + 2z = 0 \\ ② -2x + 3y + 2z = 0 \\ ③ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y - 2z \\ x = \frac{3}{2}y - z \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow E_2 = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(v, v) est libre, alors $\dim E_2 = 2$.

On a : $\begin{cases} X_B \text{ est scinde dans } \mathbb{R}[X] \\ 1 \text{ v.p simple} \Rightarrow \dim E_1 = 1 \\ 2 \text{ v.p mul}(2) = 2 \text{ et } \dim E_2 = 2 \end{cases}$

D'où B est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

$$E_1 = ?$$

Soit $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow BX = X$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 2z = x \\ -2x + 5y + 2z = 0 \\ 2x - 3y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(3)+(1)} \begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \Rightarrow y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = -y \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_1 = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow B = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exercice 5

$$\exists p \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^p = 0 \text{ et } f^{p-1} \neq 0$$

libre
soit

1) Nq f n'est pas diagonalisable.

Supposons que f est diagonalisable.
alors il existe B une base de E tq.

$$\Pi(f, B) = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\Rightarrow \Pi(f^p, B) = D^p = \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i^p = 0, \forall i (1 \leq i \leq n) \Leftrightarrow \lambda_i = 0$$

$$\Leftrightarrow f = 0 \text{ impossible}$$

D'où f n'est pas diagonalisable.

2) On a. $f^{p-1} \neq 0$, alors $\exists x \neq 0$ tq.

$$f^{p-1}(x) \neq 0$$

3) Si λ v.p de f , alors λ^p v.p de $f^p = 0$

$$\Rightarrow \lambda^p = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \text{Sp}(f) \subset \{0\}$$

D'autre part on a. $f^{p-1}(x) \neq 0$, pour $x \neq 0$

$$\Rightarrow \text{et } f(f^{p-1}(x)) = f^p(x) = 0$$

$\Rightarrow f^{p-1}(x)$ est un vecteur propre de f .

associée à la v.p. 0 $\Leftrightarrow 0 \in \text{Sp}(f)$

$$\text{Ainsi } \text{Sp}(f) = \{0\}$$

La famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
 Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \in K$ tq
 $\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$
 $\Rightarrow f^{p-1}(\alpha_0 x + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x)) = 0$
 $\Rightarrow \alpha_0 f^{p-1}(x) + \alpha_1 f^p(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^{2p-2}(x) = 0$
 $\Rightarrow \alpha_0 = 0$
 Supposons qu'il existe $\alpha_i \neq 0$ $0 \leq i \leq p-1$ tq $\alpha_i \neq 0$
 On pose $k = \min \{ i; 0 \leq i \leq p-1 \text{ tq } \alpha_i \neq 0 \}$
 Alors $\alpha_k f^k(x) + \alpha_{k+1} f^{k+1}(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$
 On applique f^{p-k-1}
 Alors $\alpha_k f^{p-1}(x) + \alpha_{k+1} f^p(x) + \dots + \alpha_{p-1} f^{2p-2-k}(x) = 0$
 $\Rightarrow \alpha_k = 0$ absurde.
 Ainsi $\forall 0 \leq k \leq p-1, \alpha_k = 0$
 Ainsi la famille est libre.
 On a la famille $B = (x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$
 est libre et card $B = p = \dim E$
 D'où B base de E .

$\Pi(f, B) = \begin{pmatrix} f(x) & f^2(x) & \dots & f^p(x) \\ \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7
 $\dim E = n < \infty, f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\operatorname{rg} f = 1$
 1) $v_1 \neq 0$ tq $\dim f = \dim (v_1)$
 On pose $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ base de E .
 $\varphi(v_1) = \alpha_1 v_1$
 $\varphi(v_k) = \alpha_k v_1, \forall k \geq 2$
 Alors $\Pi(f, B) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
 Ainsi $\operatorname{Sp}(f) = \{0, \alpha_1\}$ ($\alpha_1 \neq 0$)
 On a $0, \alpha_1$ avec $\operatorname{mul}(0) = n-1$ ($\operatorname{car} \alpha_1 \neq 0$)
 $E_0 = \ker f$.
 Puisque $\operatorname{rg} f = 1$, alors d'après le théorème du rang $\dim \ker f = n-1 = \operatorname{mul}(0)$
 Ainsi $\ker f$ est scindé
 ou p q $\dim E_0 = \operatorname{mul}(0)$
 et α_1 v.p de f simple
 $\Rightarrow f$ est diagonalisable
 $\exists \lambda$ si $\alpha_1 = 0$, alors $\Pi(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Alors } (\pi(f, B))^2 = 0.$$

$$\text{Donc } f^2 = 0.$$

et on a $\text{rang } f = 1 \Rightarrow f \neq 0$. $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ nilpotent} \\ \text{d'indice } 2 \end{array} \right.$

b) D'après a) si $\text{tr}(f) \neq 0$, alors f est diagonalisable.

" $\Rightarrow$ " hyp. f est diagonalisable.

$$\text{mq } \text{tr}(f) \neq 0$$

Supposons que $\text{tr}(f) = 0$, alors f est nilpotent d'indice 2. $\Rightarrow \text{Sp}(f) = \{0\}$

et f est diagonalisable $\Leftrightarrow$

$$\exists P \in GL(V) \text{ tq } \pi(f, B) = P \text{diag}(0) P^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow f = 0 \text{ absurde car } \text{rang } f = 1$$

Ce qui montre $\text{tr}(f) \neq 0$

$$\underline{\underline{\text{Cl}}} \quad f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{tr}(f) \neq 0$$

$$\text{ii) a) } \pi(f, B) = \begin{pmatrix} \text{tr}(f) & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi(f^2, B) = \begin{pmatrix} \text{tr}(f) & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{tr}(f) \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\text{tr}(f))^2 \alpha_2 & \dots & \text{tr}(f) \alpha_n \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \uparrow \uparrow \uparrow$$

$$= \text{tr}(f) \begin{pmatrix} \text{tr}(f) \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{tr}(f) \pi(f, B)$$

$$\Rightarrow \pi(f^2, B) = \text{tr}(f) \pi(f, B)$$

$$\Leftrightarrow f^2 = \text{tr}(f) \cdot f$$

b) Montrons 3/b.

" $\Leftarrow$ " Si $\text{tr}(f) \neq 0$, alors

$$P(X) = X^2 - \text{tr}(f)X = X(X - \text{tr}(f))$$

est un polynôme annulateur de f à racines simples. Ce qui montre que f est diagonalisable.

" $\Rightarrow$ " Si f est diagonalisable

alors $\text{tr}(f) \neq 0$, car sinon $f^2 = 0$.

c) Si $\text{tr}(f) = 1$

Alors $f^2 = f \Rightarrow f$ est un projecteur

d) $\text{tr}(f) \neq 0$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, tq $\text{Id}_E - \alpha f$ symétrique,

$$\Leftrightarrow (\text{Id}_E - \alpha f) \circ (\text{Id}_E - \alpha f) = \text{Id}_E$$

$$\Leftrightarrow \text{Id}_E - 2\alpha f + \alpha^2 f^2 = \text{Id}_E$$

⑥

$$\Rightarrow -2\alpha \cdot f + \alpha^2 f^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha (-2f + \alpha (tf)f) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + \alpha t(f) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{t(f)}}$$

3) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ by $\mathcal{M}(f, B) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{rg } A = \text{rg } f = 1$

$t(f) = t(A) = 3 \neq 0$, alors f est diagonalisable

Exercice 4

$n \geq 1$;

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $P_n(x) = \det(xI_n - A)$

$$= (-1)^n \det(A - xI_n)$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

On développe selon la 1^{ère} colonne, alors

$$P_n(x) = (-1)^n \left[(-x) \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \right]$$

$$= (-1)^n \left[(-x) (-1)^{n-1} P_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{vmatrix} \right]$$

on développe selon la 1^{ère} ligne

Alors

$$P_n(x) = x P_{n-1}(x) - (-1)^n \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$$

Donc

$$P_n(x) = x P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$$

2) $P_1(x) = x$

$$P_2(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 - 1$$

3) $x \in]-2, 2[$. Soit $x = 2 \cos \alpha$, $\alpha \in]0, \pi[$

Il y a $n \geq 1$; $\sin \alpha \cdot P_n(x) = \sin((n+1)\alpha) = P(n)$

Pour $n=1$; $\sin \alpha P_1(x) = \sin \alpha (2 \cos \alpha)$

$$= \sin 2\alpha \quad \text{vrai}$$

Pour $n=2$; $\sin \alpha P_2(x) = \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1)$

Or $\sin 3\alpha = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha$

$$= \sin \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) + 2 \cos^2 \alpha \sin \alpha$$

$$= \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1)$$

$\Rightarrow \sin 3\alpha = \sin \alpha P_2(x) \quad \text{vrai}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vérifiés et montrons $P(n+2)$

$$\begin{aligned}
 P_{n+2}(x) \sin \alpha &= \sin \alpha (x P_{n+1}(x) - P_n(x)) \\
 &= \sin \alpha (2 \cos \alpha P_{n+1}(2 \cos \alpha) - P_n(2 \cos \alpha)) \\
 &= 2 \cos \alpha \sin(n+2)\alpha - \sin((n+1)\alpha) \\
 &= \sin((n+3)\alpha) + \sin(n+1)\alpha - \sin(n+1)\alpha \\
 &= \sin((n+3)\alpha)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{n+2}(x) = \frac{\sin((n+3)\alpha)}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \sin \alpha P_n(x) = \sin(n+1)\alpha$$

4) 5) On a. A_n est diagonalisable avec
 $Sp(A_n) = \{x_k = \cos(\frac{k\pi}{n+1}), 1 \leq k \leq n\}$
 et $\text{mul}(x_k) = 1, \forall 1 \leq k \leq n$
 Alors

$$a) \sum_{k=1}^n x_k = \text{tr}(A_n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \cos(\frac{k\pi}{n+1}) = 0$$

$$b) \det(A_n) = (-1)^n P_n(0) \mid \begin{matrix} n = \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \in]0, \pi[\end{matrix}$$

$$= (-1)^n \sin((n+1)\frac{\pi}{2})$$

$$= (-1)^n \cos(n\frac{\pi}{2})$$

$$c) A_n \text{ est diagonalisable} \Rightarrow \det(A_n) = \prod_{k=1}^n x_k$$

$$\Rightarrow \prod_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{n+1} = (-1)^n \cos(n\frac{\pi}{2})$$

$$d) B_n = aI_n + bA_n$$

On a A_n est diagonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq

$$A_n = P D P^{-1} \Rightarrow B_n = P (aI_n + bD) P^{-1}$$

$$\Rightarrow B_n \text{ est diagonalisable et } Sp(B_n) = \{a + b x_k\}_{k \in \{1, \dots, n\}}$$

$$4) P_n(x) = 0 \Rightarrow \sin(n+1)\alpha = 0$$

$$\Rightarrow (n+1)\alpha = k\pi$$

$$\alpha = \frac{k\pi}{n+1}; 1 \leq k \leq n$$

$$\Rightarrow x_k = 2 \cos(\frac{k\pi}{n+1}); 1 \leq k \leq n \text{ sont}$$

des racines de P_n .

Or $\deg P_n \rightarrow$ les $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont des racines de P_n
 qui sont 2 à 2 $\neq$. (car $\frac{k\pi}{n+1} \in]0, \pi[$ et $\cos$ est bijectif sur $]0, \pi[$)
 D'où A_n est diagonalisable.

Exercice 6

Φ projecteur tq $\Phi \neq 0$ et $\Phi \neq Id_E$

1) On a Φ est un projecteur $\Leftrightarrow \Phi^2 = \Phi$
 $\Leftrightarrow \Phi^2 - \Phi = 0$

D'où $P(x) = x^2 - x$ est un polynôme annulateur de Φ , alors $Sp_\Phi(\Phi) \subset \{0, 1\}$
 Comme Φ est un projecteur, alors

$$E = \ker \Phi \oplus \ker(\Phi - Id_E) \quad (*)$$

$$\rightarrow \Phi \neq 0, \text{ d'où } \ker \Phi \neq E$$

$$\Rightarrow \ker(\Phi - Id_E) \neq \{0\}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ v.p. de } \Phi$$

$$\rightarrow \Phi \neq Id_E \Rightarrow \ker(\Phi - Id_E) \neq E$$

$$\Rightarrow \ker \Phi \neq \{0\}$$

$$\Rightarrow 0 \text{ v.p. de } \Phi$$

Ainsi

$$[Sp_\Phi(\Phi) = \{0, 1\}]$$

$$E = \ker \Phi \oplus \ker(\Phi - Id_E) \Rightarrow \Phi \text{ diagonalisable}$$

On a $S_{p_K}(\Phi) = \{0, 1\}$
 Alors $S_{p_K}(\Phi) = \{1, 2\}$
 $\Rightarrow 0$ n'est pas v.p de Φ
 $\Leftrightarrow \text{Ker } \Phi = \{0\} \Leftrightarrow \Phi$ injective.
 $\Leftrightarrow \dim E < \infty$
 $\Leftrightarrow \Phi$ bijective $\Leftrightarrow \Phi$ inversible.

* $(\text{Id}_E + \Phi)^{-1} = \text{Id}_E + \alpha \Phi$
 D'où $(\text{Id}_E + \Phi)(\text{Id}_E + \alpha \Phi) = \text{Id}_E$
 $\Leftrightarrow \text{Id}_E + \alpha \Phi + \Phi + \alpha \Phi^2 = \text{Id}_E$
 $\Leftrightarrow (\alpha + 1)\Phi = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$
 Ainsi $(\text{Id}_E + \Phi)^{-1} = \text{Id}_E - \frac{1}{2}\Phi$

3) $E = \Pi_n(\mathbb{R})$; $\Phi: E \rightarrow E$
 $A \mapsto \Phi(A) = \frac{\text{tr}(A \cdot J)}{n^2} J$

a) $\Phi(J) = \frac{\text{tr}(J^2)}{n^2} \cdot J$
 or $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow J^2 = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & & n \end{pmatrix} = nJ$
 $\Rightarrow \text{tr}(J^2) = n^2$

Ainsi $\boxed{\Phi(J) = J}$

b) L'app tr est linéaire, d'où Φ est linéaire

1) $\Phi \circ \Phi(A) = \Phi(\Phi(A))$
 $= \Phi\left(\frac{\text{tr}(A \cdot J)}{n^2} J\right)$
 $= \frac{\text{tr}(A \cdot J)}{n^2} \cdot \Phi(J) = \frac{\text{tr}(A \cdot J)}{n^2} J = \Phi(A)$

Ainsi $\Phi \circ \Phi = \text{Id}$ $\Rightarrow \Phi$ est un projecteur
 Soit on a $\forall A \in \Pi_n(\mathbb{R})$; $\Phi(A) = \frac{\text{tr}(A \cdot J)}{n^2} J$
 $\Rightarrow \text{Im } \Phi \subseteq \text{vect}(J)$
 or $\Phi(J) = J \Rightarrow J \in \text{Im } \Phi$

Ainsi $\boxed{\text{Im } \Phi = \text{vect}(J)}$
 • $A \in \text{Ker } \Phi \Leftrightarrow \Phi(A) = 0 \Leftrightarrow \frac{\text{tr}(A \cdot J)}{n^2} J = 0$
 $\Leftrightarrow \text{tr}(A \cdot J) = 0$

Ainsi $\text{Ker } \Phi = \{A \in \Pi_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A \cdot J) = 0\}$

d) On a Φ est un projecteur.
 $\text{Im}(\Phi) = \text{vect}(J) \Rightarrow \Phi \neq 0$
 $\Phi \neq \text{Id}_E$

D'après 1) Φ est diagonalisable.
 Alors • 1 v.p avec $\dim E_1 = \text{mul}(1)$
 $\left. \begin{array}{l} \dim \text{Im } \Phi \\ \text{mul}(1) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$
 • 0 v.p avec $\dim E_0 = \text{mul}(0)$
 $\left. \begin{array}{l} \dim E_0 \\ n-1 \end{array} \right\}$

$$\Rightarrow \text{mul}(0) = n-1$$

On déduit $\boxed{\chi_{\phi}(x) = (x-1)x^{n-1}}$

Exercice 8.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]; \quad \phi(P)(x) = -3xP'(x) + (1-x^2)P''(x)$$

1) Soit $P \in F_n \Leftrightarrow \deg P \leq n$

Si $n \geq 2$; alors $\deg(\phi(P)) \leq \max(\deg x P', \deg (1-x^2)P'')$
 $\leq \max(n-1+1, n-2+2)$

$$\Rightarrow \deg(\phi(P)) \leq n \Rightarrow \phi(P) \in F_n$$

Si $n < 2 \Leftrightarrow P(x) = ax + b$
 $\Rightarrow \phi(P) = -3ax \Rightarrow \phi(P) \in F_n$

Ainsi: $\forall n \in \mathbb{N}; F_n$ est stable par ϕ .

$\Rightarrow \phi$ induit un endo sur F_n .

2) a) $A_2 = \pi(\phi_2, B_2); B_2 = (1, x, x^2)$
 $\phi(1) = 0; \quad \phi(x) = -3x; \quad \phi(x^2) = -6xx + (1-x^2) \cdot 2$
 $= -8x^2 + 2$

Ainsi $A_2 = \begin{pmatrix} \phi(1) & \phi(x) & \phi(x^2) \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{matrix}$

$$b) \phi(x^k) = -3x(kx^{k-1}) + (1-x^2)(k(k-1)x^{k-2})$$

$$= -3kx^k + k(k-1)x^{k-2} - k(k-1)x^k$$

$$\phi(x^k) = -k(k+2)x^k + k(k-1)x^{k-2}$$

Ainsi:

$$A_n = \begin{pmatrix} \phi(1) & \phi(x) & \dots & \phi(x^k) & \dots & \phi(x^n) \\ 0 & -3 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & k(k-1) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & -k(k+2) & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & -n(n+2) \end{pmatrix}$$

c) La matrice $A_n = \pi(\phi_n, B_n)$ est triangulaire supérieure, d'où les λ_p de ϕ_n sont les termes diagonaux de A_n .
 Ainsi $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\phi_n) = \{ \lambda_k = -k(k+2), 0 \leq k \leq n \}$

$\forall k \neq p; \lambda_k \neq \lambda_p$

Supp $\exists k \neq p$ tq $\lambda_k = \lambda_p \Leftrightarrow$
 $-k(k+2) = -p(p+2)$

$$k^2 - p^2 + 2k - 2p = 0 \Leftrightarrow$$

$$(k-p)(k+p+2) = 0 \quad \text{imp.}$$

Car $k \neq p$ et $k+p+2 \neq 0$

Ainsi $\begin{cases} \phi_n \text{ admet } (n+1) \text{ vp } \lambda_i \neq 0 \\ \dim F_n = n+1 \end{cases}$

qui montre que φ_n est diagonalisable
 Montrer qu'il existe une unique base
 $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de F_n formée de vecteurs
 propres de φ_n } i) $\deg(P_k) = k$; $\forall 0 \leq k \leq n$
 ii) $\text{Coef dom}(P_k) = 1$

Existence.

On a φ_n est diagonalisable, alors il existe
 $(Q_0, \dots, Q_n)$ une base de F_n formée
 des vecteurs propres de φ_n .

On pose $P_k = \frac{Q_k}{\text{Coef dom}(Q_k)}$; $\forall 0 \leq k \leq n$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Coef dom } P_k = 1}$$

• Soit $p = \deg P_k \Leftrightarrow P_k(x) = x^p + H(x)$
 (deg $H \leq p-1$)

P_k vecteur propre de φ_n associé à λ_k

$$\Rightarrow \varphi_n(P_k) = \lambda_k P_k \Leftrightarrow$$

$$-3x P_k'(x) + (1-x^2) P_k''(x) = \lambda_k P_k(x)$$

$$-3x(p \cdot x^{p-1} + H'(x)) + (1-x^2)[p(p-1)x^{p-2} + H''(x)] = \lambda_k(x^p + H(x))$$

En identifiant les coefficients de x^p , on obtient:

$$\begin{aligned} -3p + p(p+1) &= \lambda_k \Leftrightarrow -p(p+2) = \lambda_k \\ &\Leftrightarrow \lambda_p = \lambda_k \\ &\Leftrightarrow \underline{p = k} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\deg P_k = k}$

Unicité

Supposons qu'il existe une ^{autre} base de F_n $(R_0, R_1, \dots, R_n)$ formée des vecteurs propres de φ_n

vérifiant $\begin{cases} \text{Coef dom } R_k = 1 \\ \deg R_k = k \end{cases}$

On a R_k vecteur propre de φ_n associé à λ_k
 $\Rightarrow R_k \in \text{vect } \{P_k\}$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tq } R_k = \alpha P_k$$

$$\Rightarrow \text{Coef dom}(R_k) = \text{Coef dom}(\alpha P_k)$$

$$\quad \quad \quad \underline{1 = \alpha}$$

Ainsi $\underline{R_k = P_k}$; $\forall 0 \leq k \leq n$

4) On pose

$$R_k(x) = P_k(-x)$$

$$\begin{aligned} a) \varphi_n(R_k)(x) &= -3x R_k'(x) + (1-x^2) R_k''(-x) \\ &= -3x(-P_k'(-x)) + (1-x^2) P_k''(-x) \\ &= 3x P_k'(-x) + (1-x^2) P_k''(-x) \\ &= \varphi_n(P_k)(-x) = \lambda_k P_k(-x) \\ &= \lambda_k R_k(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_n(R_k)(x) = \lambda_k R_k(x)}$$

b) R_k est un vecteur propre de φ_n associé à la VP λ_k .

$$\begin{aligned} R_k(x) &= P(-x) \Rightarrow \deg(R_k) = k \\ \text{Coef dom.}(R_k) &= (-1)^k \Rightarrow \text{Coef dom.}\left(\frac{R_k}{(-1)^k}\right) = 1 \end{aligned}$$

unicité
d'après 3/

$$\frac{R_k}{(-1)^k} = P_k$$

$$\Rightarrow P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$$

$\Rightarrow P_k$ a même parité que k .

c) soit $k \geq 3$.

$$\text{On a } \begin{cases} \varphi(P_k) = \lambda_k P_k \\ \deg P_k = k \\ \text{Coef dom. } P_k = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_k(x) = x^k + a x^{k-1} + b x^{k-2} + \varphi(x)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k(k-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k(k+2) \\ k & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} a_0 \\ b \\ a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En identifiant les coef $k-2$, $k+1$ et k , on obtient

$$\begin{cases} -(k-2)(k)b + k(k-1) = \lambda_k b \\ -(k-1)(k+1)a = \lambda_k a \\ -k(k+2) = \lambda_k \text{ vérifier } (12) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} b(\lambda_k + k(k-2)) &= k(k-1) \\ b(-k(k+2) + k(k-2)) &= k(k-1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} b(-4k) &= k(k-1) \\ |b| &= \frac{1-k}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } a(\lambda_k + (k-1)(k+1)) &= 0 \\ a(-k^2 - 2k + k^2 - 1) &= 0 \\ a(2k+1) &= 0 \Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$P_k(x) = x^k + \frac{1-k}{4} x^{k-2} + \varphi \quad \deg \varphi < k-2$$

Exercice 3

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x+4y-4z, x, y) \end{aligned}$$

$$1) M(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Cherchons une base $B' = (v, u, w)$

$$\text{Lg } M(f, B') = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} f(v) &= v & \Leftrightarrow v \in \ker(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\ f(u) &= 2u & \Leftrightarrow u \in \ker(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\ f(w) &= -2w & \Leftrightarrow w \in \ker(f + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \end{aligned}$$

Problème

Partie III

- On note par $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .
- Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.
- On note par $Rac(A)$ l'ensemble des racines carrées de A .

Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents cas.

1. Cas où A possède n valeurs propres distinctes.

On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

- (a) • A admet n valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable et semblable à une matrice diagonale. D'où l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- Soit R une racine carrée de A et $S = P^{-1}RP$. Comme $R^2 = A \Leftrightarrow S^2 = P^{-1}R^2P = D \Leftrightarrow S^2 = D$.

(b) Racines carrées de D . Soit S une racine carrée de D .

i) $SD = S^3 = DS$. Posons $S = (S_{ij})$. Comme $SD = DS$ on a $\lambda_i S_{ij} = S_{ij} \lambda_j$ et donc pour $i \neq j$, $S_{ij} = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_j$ d'où la matrice S est diagonale.

2i) On a alors $S^2 = \text{diag}(s_1^2, \dots, s_n^2) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. d'où $\forall i, s_i^2 = \lambda_i$.

3i) Si $\lambda_1 < 0, i = 1, s_1^2 = \lambda_1$ n'a pas de solution donc $Rac(A) = \emptyset$.

4i) Si on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles alors

$\lambda_1 \geq 0 \Rightarrow \lambda_i > 0, \forall i \geq 2$.

Les racines carrées de la matrice D :

$$Rac(D) = \{\text{diag}(\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n}), \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

(c) On cherche la racine carrée de A si $0 = \lambda_1$ et $\lambda_i > 0$ pour $i \geq 2$.

Si $\lambda_1 < 0, Rac(D) = \emptyset \Rightarrow Rac(A) = \emptyset$.

Si $\lambda_1 > 0$ une racine carrée de D est connue par le choix de $\varepsilon_i = 1$ ou -1 ,

$$Rac(A) = \{P \text{diag}(\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

Deux choix de ε donneront deux racines carrées distinctes de D sauf dans le où

$\lambda_1 = 0$, d'où

$$\text{card}(Rac(A)) = 2^{n-1} \text{ si } \lambda_1 = 0$$

$$\text{card}(Rac(A)) = 2^n \text{ si } \lambda_1 > 0$$

(d) Application : $A \in M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 0
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 1
- $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 16

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = P \text{diag}(0, 1, 16) P^{-1}$, 4 racines carrées de A

$$\text{Rac} A = \{P \text{diag}(0, 1, 4) P^{-1}, P \text{diag}(0, -1, 4) P^{-1}, P \text{diag}(0, 1, -4) P^{-1}, P \text{diag}(0, -1, -4) P^{-1}\}$$

$$\text{Rac} A = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

On cherche dans ce cas à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.

Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une racine carrée de la matrice nulle. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f .

- (a) $R^2 = 0 \Rightarrow f \circ f = 0$. Donc $y \in \text{Im} f \Rightarrow \exists x \in E / y = f(x)$ d'où $f(y) = f^2(x) = 0 \Rightarrow y \in \ker f$, donc $\text{Im} f \subset \ker f$
Le théorème du rang

$$r + \dim(\ker f) = n,$$

Comme $\dim(\ker f) \geq r$ donc $r \leq \frac{n}{2}$

$$(b) i) \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^r \beta_i u_i = 0.$$

En composant par $f \Rightarrow f(e_i) = 0$ et $f(u_i) = e_i$, $\sum_{i=1}^r \beta_i f(u_i) = \sum_{i=1}^r \beta_i e_i = 0, (e_1, \dots, e_r$
est libre $\Rightarrow \beta_i = 0 \forall i$.

$\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i = 0, (e_1, \dots, e_{n-r})$ est libre $\Rightarrow \alpha_i = 0$.

D'où B libre et $\text{card} B = \dim E \Rightarrow B$ est une base.

2i)

$$M_r = \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $R \in \text{Rac}(A)$ alors soit $R = 0$ soit R semblable à M_r , $R = PM_rP^{-1}$, $P \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\text{Rac}(A) = \{PM_rP^{-1}/P \in GL_n(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}^* \cap [1, \frac{n}{2}]\} \cup \{0\}.$$

(d) Application : $n = 4$, les racines carrées de la matrice nulle sont 0 et les matrice

semblables à l'une des deux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3. Cas où $A = I_n$ la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

(a) Soit R une racine carrée de la matrice unité I_n .

i) $R^2 = I_n \Leftrightarrow R^{-1} = R$, R est inversible.

2i) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de R . R est semblable à une matrice diagonale qui ne contient que 1 ou -1 sur la diagonale.

$$R \text{ est semblable à } S_q = \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{pmatrix}.$$

(b) $\text{Rac}(I_n) = \{PS_qP^{-1}/P \in GL_n(\mathbb{R}), q \in \{0, \dots, n\}\}.$

4. Cas où A est une matrice symétrique réelle.

Non, prendre par exemple $S = \text{diag}(-1, 0, 1, \dots, n-1)$ une valeur propre négative.