

Correction Série II Réduction

Exercice 1

1/a) 0 v.p. de AB , alors $\exists X \neq 0_{n+1}$ tq
 $ABX = 0_{n+1} \Leftrightarrow \det(AB) = 0 \Leftrightarrow \chi_{AB}(0) = 0$
 $\Leftrightarrow \det(BA) = 0 \Leftrightarrow \chi_{BA}(0) = 0$
 $\Leftrightarrow 0$ v.p. de BA .

b) soit $\lambda \in \text{Sp}(AB)$.
 Si $\lambda = 0$, d'après a) $\lambda = 0 \in \text{Sp}(BA)$
 Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists X \neq 0_{n+1}$ tq $ABX = \lambda X$
 $\Rightarrow BABX = \lambda BX$
 $\Rightarrow \exists Y = BX$ tq $BA Y = \lambda Y$
 ... donc $\lambda \neq 0$, car sinon $ABX = 0$
 imp puisque $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$
 $\Rightarrow \text{Sp}(AB) \subset \text{Sp}(BA)$
 Puisque A et B jouent des rôles symétriques
 Apm $\text{Sp}(BA) \subset \text{Sp}(AB)$
 D'où $\text{Sp}(AB) = \text{Sp}(BA)$

2/a) $r \leq \min(n, p)$ et $B \in \Pi_{n,p}(K)$
 On écrit la matrice B par blocs sous
 la forme $B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$ avec $C \in \Pi_r(K)$
 $D \in \Pi_{r, p-r}(K)$
 $E \in \Pi_{n-r, r}(K)$
 $F \in \Pi_{n-r, n-p}(K)$

$\Rightarrow J_r B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \chi_{J_r B}(x) = x^{p-r} \chi_C(x) \Rightarrow x^n \chi_{J_r B}(x) = x^{n+p-r} \chi_C(x)$

D'autre part.
 $B J_r = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \chi_{B J_r}(x) = x^{n-r} \chi_C(x)$
 $\Rightarrow x^p \chi_{B J_r}(x) = x^{n+p-r} \chi_C(x)$
 Ainsi $x^n \chi_{J_r B}(x) = x^p \chi_{B J_r}(x)$

Soit $A \in M_n(K)$. On pose. $r = \text{rg}(A)$
 Alors $\exists Q \in GL_r(K); \exists P \in GL_n(K)$ tq
 $A = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$.

Alors d'après a/

$$X^n \chi_{AB}(X) = X^n \chi_{Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P \cdot B} (X) = X^n \chi_{\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P \cdot B \cdot Q} (X)$$

$$\stackrel{a)}{=} X^P \chi_{\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} (X) \stackrel{b)}{=} X^P \chi_{P \cdot B \cdot A \cdot P^{-1}} (X)$$

$$\Rightarrow |X^n \chi_{AB}(X)| = |X^P \chi_{BA}(X)|$$

3) A inversible

Soit $\lambda \neq 0$; $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = \det(\lambda I_n - A^{-1})$

$$= \det(\lambda A - I_n) \det(A^{-1})$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \det(\lambda(A - \frac{1}{\lambda} I_n))$$

$$= \frac{(-1)^n \lambda^n}{\det A} \det(\frac{1}{\lambda} I_n - A)$$

$$= \frac{\lambda^n}{\chi_A(0)} \det(\frac{1}{\lambda} I_n - A)$$

$$\Rightarrow \chi_{A^{-1}}(\lambda) = \frac{\lambda^n}{\chi_A(0)} \chi_A\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Exercice 2

Eq $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \forall i$
 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

1) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Alors $AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \forall p \in A \Rightarrow X \neq 0_{n,1}$ tq
 $AX = \lambda X$.

Puisque $X \neq 0_{n,1}$, on considère
 $|x_{i_0}| = \max \{ |x_i|, i \in \{1, \dots, n\} \}$

On a $(AX)_{i_0} = \lambda x_{i_0}$

$$\Rightarrow |\lambda x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| |x_j| \quad (|x_j| \leq |x_{i_0}|)$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |a_{i_0 j}| |x_{i_0}|$$

car $|x_{i_0}| \neq 0$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq 1$$

b) Utilisons les mêmes notations
 que a/. Alors

$$(AX)_{i_0} = \lambda x_{i_0} \Leftrightarrow$$

$$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j = a_{i_0 i_0} x_{i_0} + \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} x_j$$

$$|\lambda - a_{ii}| |x_{i0}| \leq \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_{j0}|$$

$$\Rightarrow |\lambda - a_{ii}| \leq 1 - a_{ii}$$

$$\Rightarrow \exists w = a_{ii} \text{ vérifiant } 6/$$

Exercice 3

$$\chi_A(x) = - \begin{vmatrix} -x & 0 & 2 \\ 4 & 4-x & -1 \\ -3 & -2 & e-x \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$= (x-2)^3$$

χ_A est racine, alors A est trigonalisable.

$$\exists B = A - 2I_3$$

$$v \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^3) \text{ by } \text{Mat}(v, B) = B$$

On a d'après le théorème de Cayley-Hamilton

$$\chi_A(A) = 0_3 \Leftrightarrow B^3 = 0_3$$

$$\Rightarrow B \text{ matrice nilpotente} \Leftrightarrow v \text{ est nilpot}$$

D'autre par $\mathcal{V}(E_1) \leadsto B^2 e_1 = B B e_1$

$$= B \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow B$ nilp d'indice 3

3) On a $B' = (e_1, v(e_1), v^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ car v nilp d'indice 3

$$\text{Mat}(v, B') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}(v, B) = P_{B \rightarrow B'} \text{Mat}(v, B') P_{B' \rightarrow B}$$

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A = 2I_3$$

$$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Exercice 4

$$\beta \in \mathbb{C}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e & -1 \\ -3\beta & 4 & \beta \\ -e & e & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = - \begin{vmatrix} -x & e & -1 \\ -3\beta & x-4 & \beta \\ -e & e & 1-x \end{vmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$= - \begin{vmatrix} e-x & 0 & e+x \\ -3\beta & x-4 & \beta \\ -e & e & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2\beta & x-4 & \beta \\ -2 & e & 1-x \end{vmatrix}$$

$$C_1 \leftarrow C_1 + C_3$$

(3)

$$= (x-2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & x-4 & \beta \\ -1-x & 2 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (x-2) (-6 + (1+x)(x-4))$$

$$\chi_A(x) = (x-2)^2(x-1)$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(A) = \{0, 1\} \text{ avec } \text{mul}(1)=1 \\ \text{mul}(2)=2.$$

2) on a le poly minimal de A divise le poly caractéristique. Alors

$$\pi_A(x) = (x-2)(x-1) \text{ ou } (x-2)^2(x-1).$$

$$\text{Supp que } \pi_A(x) = (x-2)(x-1)$$

$\Rightarrow \pi_A$ est scindé et a racines simples.

D'où A est diagonalisable. On déduit

$$\text{que } \dim E_2 = 2 \Leftrightarrow \dim \ker(A - 2I_3) = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(A - 2I_3) = 1$$

$$\text{or } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & \beta & \beta \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \text{rg}(A - 2I_3) = 1 \Leftrightarrow -\beta - 3 = 2\beta \\ \Leftrightarrow \underline{\beta = -1}$$

Q. Si $\beta = -1$, alors A est diagonalisable

$$\Rightarrow \pi_A(x) = (x-2)(x-1)$$

• Si $\beta \neq -1$, alors A n'est pas diagonalisable

$$\Rightarrow \pi_A(x) = (x-2)^2(x-1)$$

Exercice 5

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = - \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 0 \\ -4 & -1-x & 0 \\ 4 & 8 & -2-x \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x^2 - 2x + 6) = (x+2)(x-1)^2$$

$$E_1 = \ker(A - I_3)$$

$$\text{or } (A - I_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C_1 = 2C_2$$

$$(C_1, C_3) \text{ libre } \Rightarrow \text{rg}(A - I_3) = 2.$$

$$\Rightarrow \dim E_1 = \dim \ker(A - I_3) = 1 \neq \text{mul}(1)$$

$\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable.

$$2) \ker(A - I_3)^2 = ??$$

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & -36 & 9 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - I_3)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x + 4y - z = 0 \Leftrightarrow z = 4x + 4y.$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 4x + 4y \end{pmatrix} = x v_1 + y v_2.$$

$$\text{avec } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ker(A - I_3)^2 = \text{vect}(v_1, v_2).$$

$$3) \text{ On a } \chi_A(X) = (X + 2)(X - 1)^2$$

D'après le th de Cayley-Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux.

$$\ker \chi_A(A) = \ker(A + 2I_3) \oplus \ker(A - I_3)^2$$

$$\Leftrightarrow \textcircled{*} \mathbb{R}^3 = \ker(A + 2I_3) \oplus \ker(A - I_3)^2$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tq $\text{Mat}(f, B) = A$.

$$\text{On a : } \ker(A + 2I_3) = \text{vect}(v_3) \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\ker(A - I_3) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $\ker(A - I_3) \subset \ker(A - I_3)^2$

On choisit un vecteur $v_3 \in \ker(A - I_3)^2$

tq $v_3 \notin \ker(A - I_3)$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (v_1, v_2)$ base de $\ker(A - I_3)^2$

D'après (4) $B = (v_1, v_2, v_3)$ $f(v_1) f(v_2) f(v_3)$

$$\rightarrow \text{Mat}(f, B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_3) \mapsto A v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

1) $U \in \mathcal{L}(E)$

$$\chi_U(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$$

différentiels

D'après le lemme de décomposition des noyaux et le th de Cayley-Hamilton.

$$E = \bigoplus_{k=1}^p \ker(U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$$

$$\text{On pose } F_k = \ker(U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$$

Puisque $U - \lambda_k \text{id}_E$ commute avec U

$$\Rightarrow \text{Alors } (U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} \text{ " " "}$$

$$\Rightarrow \ker(U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} \text{ est stable par } U$$

$$e) U_k = U|_{F_k} \text{ endo induit par } U \text{ à } F_k$$

$$\text{On pose } N_k = U_k - \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$\forall x \in \ker(U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}, \text{ on a } (U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in F_k, N_k^{m_k}(x) = 0_E$$

$$\Rightarrow N_k \text{ nilpotent.}$$

(5)

$$\Rightarrow U_k = N_k + \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$\text{On a } \Rightarrow U_k = N_k + H_k.$$

$$\begin{aligned} \exists / \alpha \text{ On a } \chi_U(X) &= \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k} \\ &= (X - \lambda_k)^{m_k} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p (X - \lambda_j)^{m_j} \end{aligned}$$

$$\text{On pose } P(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p (X - \lambda_j)^{m_j}$$

Puisque P est scindé et ses racines sont λ_j avec $j \neq k$, alors $P \wedge (X - \lambda_k)^{m_k} = 1$

D'après le lemme de décomposition des noyaux

$$\begin{aligned} \ker \chi_U|_U &= \ker (X - \lambda_k)^{m_k}(U) \oplus \ker P(U) \\ &= \ker (U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} \oplus \ker P(U) \end{aligned}$$

$$E = N_k \oplus G.$$

avec $G = \ker P(U)$.

Puisque U et $P(U)$ commutent, alors

$\ker(P(U))$ est stable par U .

$$\begin{aligned} \forall x \in F_k \text{ on a } (U_k - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}(x) &= 0_E \\ \Rightarrow (X - \lambda_k)^{m_k} \text{ est un polynôme annulateur} & \\ \text{de } U_k. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(U_k) \subset \{\lambda_k\}$$

D'autre part on a. $\lambda_k \forall p$ de $U \Rightarrow$

$$\exists x \neq 0_E \text{ tel que } (U - \lambda_k \text{id}_E)(x) = 0$$

$$\Rightarrow (U - \lambda_k \text{id}_E)(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker (U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$$

$$\text{et vérifie } U_k(x) = \lambda_k x$$

$$\Rightarrow \lambda_k \in \text{Sp}(U_k)$$

$$\text{Ainsi } \text{Sp}(U_k) = \{\lambda_k\}$$

Autrement :

$$\text{On a } U_k = N_k + \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$\Leftrightarrow U_k - \lambda_k \text{id}_{F_k} = N_k$$

$$\text{Puisque } N_k \text{ nilpotent } \Rightarrow \text{Sp}(N_k) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Sp}(U_k - \lambda_k \text{id}_E) = \{0\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Sp}(U_k) = \{\lambda_k\}$$

$$b) \text{ On a } E = F_k \oplus G$$

$\exists B = B_k \cup B_G$ une base de E adaptée à cette décomposition avec.

B_k base de F_k et B_G base de G

Comme F_k et G sont stables par U

$$\text{Alors } \pi(U, B) = \left(\begin{array}{c|c} \text{Mat}(U_k, B_k) & 0 \\ \hline 0 & \text{Mat}(U, B_G) \end{array} \right)$$

Eq $x = u + z$.

b) On a $E = \bigoplus_{k=1}^p F_k$.

et $U/F_k = U_k = N_k + d_k \text{id}_{F_k}$.

or N_k est nilép d'indice $m_k = \dim F_k$

$\Rightarrow \exists \alpha_k \in F_k \setminus \{0\} \text{ tq } B_k(\alpha_k, \dots, \alpha_k) = N_k(\alpha_k)$

soit une base de E .

et $\text{Mat}(N_k; B_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{Mat}(U_k; B_k) = \begin{pmatrix} d_k & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & d_k & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} = J_k$

On considère $B = (B_1, \dots, B_p) \Rightarrow B$ est une base de E et puisque F_k stable par U

$\Rightarrow \text{Mat}(U; B) = \begin{pmatrix} \text{Mat}(U_1; B_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \text{Mat}(U_p; B_p) \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_p \end{pmatrix}$.

Exercice 7

$K[U] = \{P(U); P \in K[X]\}$

π_U : le polynôme minimal de U . $\deg \pi_U = d$

On a $U^k \in K[U] \forall k \in \{0, \dots, p\}$

Alors $\text{vect}(\text{id}_E, U, U^2, \dots, U^{d-1}) \subset K[U]$.

Soit $P \in K[X]$. On effectue la division euclidienne de P par $\pi_U \Rightarrow \exists Q, R \in K[X]$

tq $P = Q\pi_U + R$ avec $\deg R \leq d-1$
 $\Rightarrow P(U) = Q(U) \circ \pi_U(U) + R(U) = R(U)$

Comme $\deg R \leq d-1$

Alors $R(U) \in \text{vect}(\text{id}_E, U, \dots, U^{d-1})$
 $P(U)$

$\Rightarrow K[U] \subset \text{vect}(\text{id}_E, U, \dots, U^{d-1})$

Ainsi $K[U] = \text{vect}(\text{id}_E, U, \dots, U^{d-1})$

2) Puisque $(\text{id}_E, U, \dots, U^{d-1})$ est une famille génératrice de $K[U]$, alors $\dim K[U] \leq d$.
 Or la famille $(\text{id}_E, U, \dots, U^{d-1})$ est libre
 supposons qu'elle est liée $\Rightarrow \exists \alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}$ des éléments de K non tous nuls tq

$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k U^k = \vec{0} \Leftrightarrow P(U) = \vec{0}$

avec $P(X) = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k X^k$

3) $P \neq \vec{0}$ et P annulateur de U

$\deg P \leq \pi_U$ ce qui est impossible.

$$\Rightarrow X_U(x) = X_{U_k}(x) \cdot X_{U_G}(x)$$

Or $\text{Sp}(U_k) = \{\lambda_k\}$ et $\exists$ un $q \in \mathbb{C} \Rightarrow X_{U_k}$ est un polynôme

$$\Rightarrow X_{U_k}(x) = (x - \lambda_k)^{\dim F_k}$$

D'où $X_U(x) = (x - \lambda_k)^{\dim F_k} X_{U_G}(x)$

avec U_G l'endo induit par $U|_G$

D'autre part on a :

$$X_U(x) = (x - \lambda_k)^{m_k} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (x - \lambda_i)^{m_i}$$

$$\Rightarrow (x - \lambda_k)^{\dim F_k} X_{U_G}(x) = (x - \lambda_k)^{m_k} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p (x - \lambda_i)^{m_i}$$

Or $G = \ker P(U)$

$$\Rightarrow P(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^p (x - \lambda_j)^{m_j}$$

est un polynôme annulateur de $U_G \Rightarrow \text{Sp}(U_G) \subset \{\lambda_j : j=1, \dots, p, j \neq k\}$

$$\Rightarrow \text{Sp}(U_G) \subset \{\lambda_j : j=1, \dots, p, j \neq k\}$$

$$\Rightarrow \lambda_k \text{ n'est pas racine de } X_{U_G}$$

Ainsi on déduit d'après (*) que

$$(x - \lambda_k)^{\dim F_k} \equiv (x - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\Rightarrow \dim F_k = m_k$$

4) On suppose que $X_U = \prod U$

Il y a N_k est nilp d'indice m_k .

On a $N_k = U_k - \lambda_k \text{id}_E$

$$\Rightarrow \forall x \in E_k : (U_k - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}(x) = 0$$

$$\Rightarrow N_k^{m_k} = 0 \text{ sur } E_k$$

Il y a $N_k^{m_k-1} \neq 0$

Supposons que $N_k^{m_k-1} = 0$.

$$\Leftrightarrow (U_k - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k-1}(x) = 0, \forall x \in E_k$$

et on a $(U_j - \lambda_j \text{id}_E)^{m_j}(x) = 0, \forall x \in E_j$

$$\Rightarrow (U_1 - \lambda_1 \text{id}_E)^{m_1} \circ \dots \circ (U_p - \lambda_p \text{id}_E)^{m_p}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\prod_{j=1, j \neq k}^p (x - \lambda_j)^{m_j} \cdot (x - \lambda_k)^{m_k-1} \right)(U) = 0$$

Alors le polynôme $Q(x) = \prod_{j=1, j \neq k}^p (x - \lambda_j)^{m_j} \cdot (x - \lambda_k)^{m_k-1}$

est un polynôme annulateur de U

ce qui est impossible car $\deg Q = n-1 < \deg P$

Exercice 8

" $\Rightarrow$ " hyp A est nilpotent.

Soit p l'indice de nilpotence de A .

$$\Rightarrow A^p = 0_n \text{ et } A^{p-1} \neq 0_n$$

$$\Rightarrow \exists x \neq 0_n \text{ tq } A^{p-1}x \neq 0_n$$

$$\Rightarrow A(A^{p-1}x) = 0 \Rightarrow A^{p-1}x \in \ker A$$

$$\Rightarrow \ker A \neq \{0\} \Rightarrow \text{ovp de } A$$

De plus x^p est un polynôme annulateur de A

$$\Rightarrow \text{Sp}(A) \subset \{0\}$$

$$\text{Ainsi } \text{Sp}(A) = \{0\}.$$

$$\Rightarrow \chi_A(x) = x^n$$

Ainsi A est trigonalisable $\Rightarrow$ semblable à

$$T \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^k \text{ semblable à } T^k = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{tr}(A^k) = 0, \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

" $\Leftarrow$ " hyp : $\text{tr}(A^k) = 0, \forall k \in \{0, \dots, n\}$

$A \in \text{M}_n(\mathbb{C})$, alors χ_A est scindé.

Supposons que A admet p v.p. $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non nuls

et $\lambda_i \neq \lambda_j$. notons $n_i = \text{mult}(\lambda_i)$.

Comme $\text{tr}(A^k) = 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}$.

Alors $n_1\lambda_1 + \dots + n_p\lambda_p = 0$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 0$$

$$n_1\lambda_1^p + \dots + n_p\lambda_p^p = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^p & \lambda_2^p & \dots & \lambda_p^p \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \det A = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

determinant
de Vandermonde

$$\Rightarrow A \text{ est inversible, alors } \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow n_1 = n_2 = \dots = n_p = 0 \text{ ce qui est impossible}$$

$$\text{D'où } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(A) = \{0\} \Rightarrow \chi_A(x) = x^n$$

$$\text{Alors } A^n = 0_n \Rightarrow A \text{ nilp.}$$

Problème: "Décomposition de Dunford."

1) On a $X_U(x) = \prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{m_k}$.

D'après le théorème de Cayley Hamilton.

On a $X_U(U) = \tilde{0}$.

D'autre part puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors les polynômes $(x - \lambda_k)^{m_k}$, $k \in \{1, \dots, p\}$ sont à 2 premiers entre eux. Alors d'après le lemme de décomposition des noyaux

$$\bigoplus_{k=1}^p \ker : (U - \lambda_k \text{id}_n)^{m_k} = \ker \left(\prod_{k=1}^p (x - \lambda_k)^{m_k} (U) \right)$$

$$= \ker X_U(U) = \tilde{0}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^p F_k$$

2) a) Puisque les polys $\phi_1, \dots, \phi_p$ sont à 2 premiers entre eux, alors

polys. $R_1, R_2, \dots, R_p$ tels que $\sum_{k=1}^p R_k \phi_k = 1$

b) D'après a) $\sum_{k=1}^p (R_k \phi_k)(U) = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$.

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^p \pi_k = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$$

3) $k, n \in \{1, \dots, p\}$. $\text{tg } n \neq k$

a) soit $v \in F_k \Leftrightarrow (U - \lambda_k \text{id}_n)^{m_k}(v) = 0$

$$\pi_n(v) = R_n(U) \circ \phi_n(U)(v)$$

$$\text{Or } \phi_n(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^p (x - \lambda_i)^{m_i}$$

$$= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^p (x - \lambda_i)^{m_i} \right) (x - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\phi_n(U)(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^p (U - \lambda_i \text{id}_n)^{m_i} \circ \underbrace{(U - \lambda_k \text{id}_n)^{m_k}}_{=0 \text{ sur } F_k}(x)$$

$$\Rightarrow \phi_n(U)(v) = 0 \in F_k \Rightarrow \pi_n(v) = 0 \in F_k$$

b) soit $v \in F_k$.

On a $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_p = \text{id}_{\mathbb{C}^n}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p \pi_i(v) = v$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \pi_i(v) + \pi_k(v) = v \Rightarrow \pi_k(v) = v$$

c) On a $\bigoplus_{k=1}^p F_k = \mathbb{C}^n$

$$\Leftrightarrow \mathbb{C}^n = F_k \oplus \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p F_i$$

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \exists y \in F_k \text{ et } z \in \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p F_i$$

$$\text{Eq } x = y + z.$$

$$\pi_k(x) = \pi_k(y) + \pi_k(z)$$

$$\text{or } y \in F_k \Rightarrow \pi_k(y) = y.$$

$$z \in \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p F_i \Rightarrow z = \sum_{i=1, i \neq k}^p z_i$$

$$\Rightarrow \pi_k(z) = \sum_{i=1, i \neq k}^p \pi_k(z_i) = 0_E$$

$$\Rightarrow \pi_k(x) = y$$

Ainsi π_k est la projection sur F_k parallèlement à $\bigoplus_{i \neq k} F_i$.

$$4) d = \sum_{i=1}^p \lambda_i \pi_i.$$

$$\forall k \in \{1, \dots, p\} \dots \pi_k = \Phi_k R_k(U)$$

$\Rightarrow \pi_k$ et U commutent, d'où $\det d$

et U commutent $\Rightarrow \det (U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$ et d commutent, alors $\ker (U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} = F_k$ est stable par d .

On pose $d_k: F_k \rightarrow F_k$ l'endomorphisme induit par d sur F_k .

$$\Rightarrow \forall v \in F_k: d_k(v) = d(v) = \lambda_k \pi_k(v) = \lambda_k v$$

On considère B_k base de F_k , $\forall k \in \{1, \dots, p\}$

$$\Rightarrow B = (B_1, B_2, \dots, B_p) \text{ base de } E$$

Comme $d_k(B_i) = 0 \forall i \neq k$.

$$\text{Alors } \pi(d, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_p & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p & \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow d$ est diagonalisable.

$$5) n = U - d.$$

$$\text{Si } v \in F_j \Rightarrow n(v) = (U - d)(v) = (U - \lambda_j \text{id}_{F_j})(v)$$

$$\Rightarrow n^{m_j}(v) = (U - \lambda_j \text{id}_{F_j})^{m_j}(v) = 0$$

$$b) \text{ soit } m = \max\{m_1, \dots, m_p\}$$

$$\forall v \in \mathbb{C}^n, \exists v_k \in F_k; k \in \{1, \dots, p\}$$

$$\text{Eq } v = v_1 + \dots + v_p.$$

$$\text{Alors } n^m(v) = 0$$

$$\text{puisque } \pi_k(v_k) = 0 \Rightarrow U^m(v_k) = 0$$

$$\Rightarrow n^m(v) = 0 \forall v \in \mathbb{C}^n \Leftrightarrow n^m = 0.$$

c) conclusion

$$\forall U \in L(\mathbb{C}^n) \exists P \text{ nilpotent et } d \text{ diagonalisable}$$

$$\text{Eq } U d = d U \text{ et } n + d = U$$

6a) d' diagonalisable $\Leftrightarrow d' \circ U = U \circ d'$
 $\Rightarrow d' \circ (U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} = (U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k} \circ d'$
 $\Rightarrow F_k = \ker (U - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$ est stable par d'

b) Puisque F_k est stable par d'
on peut définir $d'_k: F_k \rightarrow F_k$ l'endo
induit par d' sur F_k .

Or d' est diagonalisable. $\Rightarrow d'_k$ est
diagonalisable $\Rightarrow \exists B'_k$ base de F_k
formée des $\vec{v}_p$ de $d'_k \Rightarrow \vec{v}_p$ de d' .

Soit $B' = (B'_1 \dots ; B'_p)$ c'est une base
de E^n formée des $\vec{v}_p$ de d'

$\Leftrightarrow \text{Mat}(d', B')$ est diagonale
Or B'_k base de F_k , d'après le
précédent $\text{Mat}(d, B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix}$

7) L'existence est assurée à partir
de la question 6/
unicité

Supposons qu'il existe d' diagonalisable
et n' nilp $\Leftrightarrow \begin{cases} U = d' + n' \\ d' \circ d' = d' \circ n' \end{cases}$

$$\Rightarrow d + n = d' + n'$$

$$\Rightarrow d - d' = n' - n$$

Puisque d' commute avec U , alors d' commute
d'après 6/ d et d' sont diagonalisables
dans une même base. On en déduit
que $d - d'$ est diagonalisable

$\Rightarrow n' - n = 0$
Or $n - n'$ est un endo nilpotent (rien n
commute)
Alors $n' - n = 0 \Rightarrow n = n'$
Alors $d = d'$.

8) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose $V \in \mathcal{Z}(\mathbb{C}^n)$
l'end de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A
D'après ce qui précède $\exists I_0$ diag.
 $\exists N$ nilp $\Leftrightarrow$

$$U = A + d.$$

$$n \circ d = d \circ n$$

$$\text{On pose } D = \text{Mat}(d, B_c)$$

$$N = \text{Mat}(n, B_c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = D + N \\ N D = D N \\ N \text{ nilp et } D \text{ diagonalisable} \end{cases}$$

$$g) A = D + N. \quad \begin{array}{l} D \text{ diag} \\ N \text{ nilp} \end{array} \quad DN = ND$$

A inversible.

$$\Rightarrow I_n = A^{-1}D + A^{-1}N$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}D = I_n - A^{-1}N$$

or N nilp et $A^{-1}N$ commutent

$$\Rightarrow A^{-1}N \text{ nilp.} \Rightarrow \text{Sp}(A^{-1}N) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(I_n - A^{-1}N) = \{1\}$$

$$\Leftrightarrow \text{Sp}(A^{-1}D) = \{1\}$$

$$\Rightarrow D \text{ n'est pas vp de } A^{-1}D$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}D \text{ est inversible.}$$

$$\Leftrightarrow D \text{ est "}$$