

Def:

" $+$ ", " $\times$ " $\in$ L.C. i.
L.C. e.

$(A, +, \cdot)$ est un K.e.v.

$(A, +, \times)$ est un anneau.

$\forall x, \forall y \in A, \forall \lambda \in K$

$\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$

Exemples

$(\mathbb{C}, +, \times, \cdot)$; $(\mathbb{R}, +, \times, \cdot)$

$(\pi_n(K), +, \times, \cdot)$

$(\mathcal{M}(E), +, \times, \cdot)$

Sous algèbre

$B \subset A$

$1_A \in B$

$\forall x, y \in B, \forall \lambda \in K$

$x \times y \in B$

$\lambda \cdot x + y \in B$

$\Leftrightarrow (B, +, \times)$ sous-anneau $\hookrightarrow (A, +, \times)$
 $(B, +, \cdot)$ s.e.v. $\hookrightarrow (A, +, \cdot)$

Exp
 $K[X] = \{P(X); P \in K[X]\}$ { algèbre de $(K[X], +, \cdot)$ }
 $K[A] = \{P(A); P \in K[X]\}$ { alg de $(\pi_n(K), +, \cdot)$ }

$D_n(K)$ = l'ensemble des matrices diagonales
 $T_n(K)$ = " " triangulaire supérieure

$(A, +, \times, \cdot)$ est une K-algèbre

Morphisme d'algèbre

$f: (A, +, \times, \cdot) \rightarrow (B, +, \times, \cdot)$

$f(1_A) = 1_B$

$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$

$f(x \times y) = f(x) \times_B f(y)$

$\Leftrightarrow$ f app linéaire + morphisme d'anneau

f injective $\Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}$

f surjective $\Leftrightarrow f(A) = B$

$\ker f$ est un s.e.v. de $(A, +, \cdot)$

Si $(A, +, \times)$ est commutatif

$\Rightarrow \ker f$ est un idéal $\subset A$

Exp

$(\mathbb{C}, +, \times, \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}, +, \times, \cdot) = \mathbb{R}$ -algèbre.
 $z \mapsto \bar{z}$

$(K[X], +, \times, \cdot) \rightarrow (K[X], +, \times, \cdot)$
 $P \mapsto P(X)$

soit B = base de E , ($\dim E < \infty$)

$(\mathcal{M}(E), +, \times, \cdot) \rightarrow (\pi_n(K), +, \times, \cdot)$
 $f \mapsto \text{mat}(f, B)$