

Devoir à la maison : Structure

Exercice 1 .

- On dit qu'un sous groupe G de $GL_n(\mathbb{C})$ est d'exposant fini s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = I_n \forall A \in G$.
- Soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. On se propose de montrer que G est d'exposant fini si et seulement si G est de cardinal fini.
- On admet qu'un endomorphisme N est nilpotent si et seulement si $\text{tr}(N^k) = 0 \forall k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si G est de cardinal fini, alors G est d'exposant fini.
Supposons dans la suite que G est d'exposant fini. On note $p = \dim(\text{vect}(G))$
2. a) Montrer que si $A \in G$, alors A est diagonalisable.
b) En déduire que si $A \in G$, alors $A - I_n$ est diagonalisable.
3. Vérifier que l'ensemble $\text{tr}[G] = \{\text{tr}(A), A \in G\}$ est fini.
4. Justifier l'existence d'une base $(A_1, \dots, A_p)$ de $\text{vect}(G)$ telle que $A_k \in G, \forall k \in \{1, \dots, p\}$.
5. On considère l'application $f : G \longrightarrow \text{tr}[G] \times \dots \times \text{tr}[G] \text{ (} p \text{ fois)}$
 $M \longmapsto (\text{tr}(A_1 M), \dots, \text{tr}(A_p M))$
Soit $A, B \in G$ tels que $f(A) = f(B)$
 - a) Vérifier que $\text{tr}(AM) = \text{tr}(BM) \forall M \in \text{vect}(G)$.
 - b) En déduire que $\text{tr}((AB^{-1} - I_n)M) = 0$ pour tout $M \in \text{vect}(G)$.
 - c) Prouver que $AB^{-1} - I_n$ est nilpotente.
 - d) En déduire que f est injective puis que G est de cardinal fini.

Exercice 2 soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et $I \neq \{0\}$ un idéal de A . Dans A on définit la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$\forall x, y \in A, x \mathcal{R} y \iff x - y \in I$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans A .
On note $\bar{x} = Cl_{\mathcal{R}}(x)$ et on pose $A|_I = \{\bar{x}, x \in A\}$.
ON définit dans $A|_I$ les lois " + " et $\times$ par :
 $\forall, \bar{x}, \bar{y} \in A|_I, \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$ et $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{xy}$
2. Montrer que $(A|_I, +, \times)$ un anneau commutatif.
3. On dit que I est un idéal premier si pour tout $a, b \in A$ si $ab \in I$, alors $a \in I$ ou $b \in I$.
 - a) Déterminer les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$.
 - b) Déterminer les idéaux premiers de $IK[X]$.
 - c) Montrer que I est premier si et seulement si $A|_I$ est un anneau intègre.
4. a) Soit I un idéal premier.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I \implies a \in I$.
b) On pose $\text{nil}(A) = \{a \in A, \text{ tel que } \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0\}$
Montrer $\text{nil}(A)$ est un idéal de A .
c) Montrer que $\text{nil}(A) \subset I$, pour tout I idéal de A .
5. Soit A, B deux anneaux commutatifs et $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux.
 - a) Montrer que pour tout J idéal de B , $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal de A .
 - b) Montrer que si J idéal premier de B , alors $\varphi^{-1}(J)$ est un idéal premier de A .
 - c) Montrer si φ est surjective et I est un idéal de A , alors $\varphi(I)$ est un idéal de B .

Exercice 3 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère la sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\mathbb{R}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Partie I.

On considère dans cette partie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice non scalaire.

1. Montrer que $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
2. Montrer que (I_2, A) est une base de $\mathbb{R}[A]$.
3. Montrer que $\mathbb{R}[A]$ contient une matrice B telle que $B^2 = -I_2$ si et seulement si $(\text{tr}(A))^2 \leq 4\det(A)$.
4. On suppose dans cette question que $B^2 = -I_2$.
 - a) Montrer que (I_2, B) est une base de $\mathbb{R}[A]$.
 - b) On considère $f : \mathbb{R}[A] \rightarrow \mathbb{C}$ une application linéaire telle que $f(I_2) = 1$ et $f(B) = i$.
Montrer que f est un isomorphisme d'algèbres.
 - c) En déduire que $\mathbb{R}[A]$ est un corps.

Partie II.

Dans cette partie, on considère $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{R}$ algèbre de dimension finie n .

1. Soit $a \in \mathcal{A}$, on considère l'application $f_a : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ définie par : $f_a(x) = a \times x$.
 - a) vérifier que f_a est linéaire.
 - b) On suppose ici que $\mathcal{A}$ est commutative. Montrer que f_a est bijective si et seulement si $a \in \text{Inv}(\mathcal{A})$.
 - c) Donner une condition sur a pour que f_a soit un morphisme d'algèbres.
2. On considère B une base de $\mathcal{A}$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ a &\mapsto \text{Mat}(f_a, B) \end{aligned}$$
 - a) Vérifier que φ est un morphisme d'algèbre injective.
 - b) En déduire que toute algèbre de dimension n est isomorphe à une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Dans cette question $\mathcal{A}$ désigne une sous algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a) Montrer que si $\mathcal{A}$ contient une matrice non scalaire, alors $\mathcal{A}$ n'est

pas un corps.

b) Montrer que si $\mathcal{A}$ est intègre, alors $\mathcal{A}$ est un corps.

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \sigma_{\mathbb{R}}(M_i) \neq \emptyset$$