

Problème "Réduction et structure"

Introduction et Définitions

Dans tout le problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

- On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une **sous-algèbre** de $\mathcal{L}(E)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable par la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$. (Contrairement à la définition du programme, on ne demande pas que 1_E appartienne à $\mathcal{A}$).
- On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est **commutative** si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.
- Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dite **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale pour tout u de $\mathcal{A}$.
- On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ est une **sous-algèbre** de $\mathcal{M}_n(K)$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable par le produit matriciel. Elle est dite **commutative** si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, $AB = BA$.
- Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ est **diagonalisable** s'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $P^{-1}MP$ soit diagonale.

On désigne par $\mathcal{T}_n(K)$ (respectivement $\mathcal{T}_n^+(K)$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(K)$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

Partie I - Exemples de sous-algèbres (Problème)

1. Montrer que les sous-ensembles $\mathcal{T}_n(K)$ et $\mathcal{T}_n^+(K)$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(K)$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_F$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F , c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E), u(F) \subset F\}$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{A}_F$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
 - (b) i) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F . Vérifier qu'un endomorphisme u de E appartient à $\mathcal{A}_F$ si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_p(K)$, $C \in \mathcal{M}_{p, n-p}(K)$, $D \in \mathcal{M}_{n-p}(K)$ et que l'application
$$\varphi : \mathcal{A}_F \longrightarrow \mathcal{M}_p(K) \times \mathcal{M}_{p, n-p}(K) \times \mathcal{M}_{n-p}(K)$$

$$u \longmapsto (A, C, D)$$
 est un isomorphisme.
 - ii) Dédurre que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - np + p^2$.

- (c) Déterminer $\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - np + p^2)$.

3. Soit $\Gamma(K)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(K)$ constitué des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in K^2$.

- (a) Montrer que $\Gamma(K)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(K)$.
- (b) Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (c) Montrer que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Partie II - Une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$.

Pour tout $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose

$$J(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{j-i} si $j \geq i$ et a_{j-i+n} si $i > j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

Soit $J \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ défini par :

$\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Préciser les matrices J^k pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.
3. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{C})$.
4. a) Montrer que J est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
b) Dédire que $\mathcal{A}$ est diagonalisable.
5. Soit $J(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{C})$. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$?