

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E .

Un endomorphisme v de E est dit **semi-simple** si tout sous-espace vectoriel de E stable par v admet un supplémentaire dans E stable par v .

I. Supplémentaire stable de $\text{Ker}(u)$

Q. 1 – Soit F un sous-espace supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E .

(a) Montrer que l'application $\tilde{u}: F \rightarrow \text{Im}(u)$, $x \rightarrow u(x)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(b) En déduire que si F est stable par u alors $F = \text{Im}(u)$.

Q. 2 – Montrer que $\text{Ker}(u)$ admet un supplémentaire dans E stable par u si et seulement si $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Q. 3 – Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\text{Ker}(u)$ n'admet pas un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ stable par u .

II. Tout endomorphisme diagonalisable est semi-simple

Q. 4 – Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de u est stable par u .

Q. 5 – Montrer que si u est diagonalisable alors il est semi-simple.

Q. 6 – En déduire que si u est diagonalisable alors $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

III. Exemple d'endomorphisme semi-simple non diagonalisable

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Q. 7 – Montrer que $\chi_u = (X + 2)(X^2 + 1)$.

Q. 8 – Soit $e = (1, 0, 1)$. Montrer que $D = \text{Vect}(e)$ est la seule droite stable par u .

Q. 9 – Soit $\varepsilon = (2, 0, 1)$. Montrer que $P = \text{Vect}(\varepsilon, u(\varepsilon))$ est stable par u .

Q. 10 – Soit F un plan stable par u . Montrer que $F \cap P$ est stable par u , et en déduire que $F = P$.

Q. 11 – Quels sont les sous-espaces stables par u ?

Q. 12 – Montrer que u est semi-simple et non diagonalisable.

IV. Tout endomorphisme semi-simple à polynôme caractéristique scindé est diagonalisable

On suppose que u est semi-simple et que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les valeurs propres de u

$\Rightarrow F = E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_d}(u)$.

3 – Vérifier que F est stable par u .

4 – Vérifier que tout vecteur propre de u est contenu dans F .

— On veut montrer que u est diagonalisable. Par l'absurde supposons u n'est pas diagonalisable. Soit G un supplémentaire de F dans E stable par u .

(a) Vérifier que $G \neq \{0\}$.

(b) Montrer que l'endomorphisme u_G induit par u sur G admet une valeur propre.

(c) En déduire une contradiction et conclure.