

Correction devoir à la maison
Structure

Exercice 1

G s-g de $GL_n(\mathbb{C})$.

1) Si G est de cardinal fini. on pose.

$$\text{Card } G = p.$$

Alors $\forall A \in G, \exists p \mid o(A) \Rightarrow A^p = I_n$
 A est d'ordre fini

$$\Rightarrow \exists p = \text{Card } G; \forall A \in G; A^p = I_n.$$

$\Leftrightarrow A$ est d'exposant fini.

2) Thyp G est d'exposant fini $\Leftrightarrow$

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \text{ tq } A^m = I_n; \forall A \in G.$$

$\Rightarrow$ le poly $X^m - 1$ est un polynôme annulateur de A qui est scindé et à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$. D'où A est diagonalisable.

b) Si $A \in G$, A est diagonalisable.

$$\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tq } A = P D P^{-1} \text{ et } D \text{ diagonale.}$$

$$\Rightarrow A - I_n = P(D - I_n)P^{-1}$$

$\Leftrightarrow A - I_n$ est diagonalisable.

$$3) \text{tr}[G] = \{ \text{tr}(A); A \in G \}$$

Si $A \in G$, alors $A^m = I_n \Rightarrow$

$$\text{Sp}(A) \subset U_m = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^m = 1 \}$$

Comme A est diagonalisable, alors

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \text{ avec } \lambda_i \text{ vp de } A.$$

$$\in \{ z_1 + z_2 + \dots + z_m \text{ avec } z_i \in U_m \}$$

$$\Rightarrow \text{tr}[G] \subset \{ z_1 + z_2 + \dots + z_m \text{ avec } z_i \in U_m \}$$

On a $\text{Card}(U_m)$ est fini, alors

$\text{Card}\{ z_1 + z_2 + \dots + z_m \text{ avec } z_i \in U_m \}$ est fini

$\Rightarrow \text{Card}(\text{tr}[G])$ est fini

$$4) p = \dim(\text{vect}(G)).$$

G est une famille génératrice de $\text{vect}(G)$

et puisque de toute famille génératrice

on peut extraire une base, alors il existe

$A_1, A_2, \dots, A_p \in G$ tq $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ soit

une base de $\text{vect}(G)$.

$$5) f: G \longrightarrow \text{tr}[G] \times \dots \times \text{tr}[G]$$

$$\pi \longmapsto f(\pi) = (\text{tr}(A_1 \pi), \dots, \text{tr}(A_p \pi))$$

~~Soit~~ $A, B \in G$ tq $f(A) = f(B)$.

a) On a $f(A) = f(B) \Leftrightarrow$

$$\text{tr}(A_k A) = \text{tr}(A_k B), \forall k \in \{1, \dots, p\}$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}(A \cdot A_k) = \text{tr}(B A_k), \forall k \in \{1, \dots, p\}$$

$(A_1, \dots, A_p)$ base de $\text{vect}(G)$

$$\Leftrightarrow \forall \pi \in \text{vect}(G); \pi = \sum_{k=1}^n \alpha_k A_k$$

$$\Rightarrow \text{tr}(A \cdot \pi) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \text{tr}(A \cdot A_k) \quad \text{car tr est linéaire}$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k \text{tr}(B \cdot A_k)$$

$$= \text{tr}(B \pi)$$

b) On a $\text{tr}(A \pi) = \text{tr}(B \pi) \quad \forall \pi \in \text{vect}(G)$

$$\Leftrightarrow \text{tr}(A \pi - B \pi) = 0 \quad \forall \pi \in \text{vect}(G) \quad (*)$$

Puisque: $B \in G \subset GL_n(\mathbb{C}) \Rightarrow B$ inversible

$$\forall \pi \in \text{vect}(G); B^{-1} \pi \in \text{vect}(G)$$

car $\pi = \sum_{k=1}^p \alpha_k A_k$

$$\Rightarrow B^{-1} \pi = \sum_{k=1}^p \alpha_k B^{-1} A_k$$

$$\text{or } A_k \in G \Rightarrow B^{-1} A_k \in G \quad (G \text{ est } \text{alg de } G)$$

$$B^{-1} \in G$$

$$\Rightarrow B^{-1} \pi \in \text{vect}(G)$$

On applique (*) à $B^{-1} \pi$, on obtient,

$$\Leftrightarrow \text{tr}(A B^{-1} \pi - \pi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tr}((A B^{-1} - I_n) \pi) = 0, \forall \pi \in \text{vect}(G)$$

c) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a.

$$(A B^{-1} - I_n)^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (A B^{-1})^i$$

$$\text{or } A \in G, \text{ et } B^{-1} \in G \Rightarrow A B^{-1} \in G$$

$$\Rightarrow (A B^{-1})^i \in G \quad (G \text{ est } \text{alg})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (A B^{-1})^i \in \text{vect}(G)$$

... pour $\pi = (A B^{-1} - I_n)^{k-1}$

$$\text{tr}((A B^{-1} - I_n)^k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Alors la matrice $(A B^{-1} - I_n)$ est nilép.

d) Comme $A B^{-1} \in G \Rightarrow A B^{-1}$ diag

D'après e- b/ $A B^{-1} - I_n$ est diagonalisable

~~or~~ $A B^{-1} - I_n$ nilép. Alors $A B^{-1} - I_n = 0$

$$\Leftrightarrow A B^{-1} = I_n \Leftrightarrow A = B$$

(2)

L'app f est injective, alors
 $\text{card.}(G) \leq \text{card.}(\text{tr}[G], x \rightarrow x \text{tr}[G])$

Puisque $\text{Card}(\text{tr}[G]) < \infty$
 $\Rightarrow \text{Card}(\text{tr}[G] \times \dots \times \text{tr}[G]) < \infty$
 $\Rightarrow \underline{\text{Card } G < \infty}$

Exercice 3

Partie I

1) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $X_A(x) = x^e \cdot \frac{\text{tr}(A)x}{\text{det } A}$

D'après le th de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$
 $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A I_2 = 0_2$.

2) $\text{IR}[A] = \{ P(A); P \in \text{IR}[X] \}$
 $\text{Mg}(I_2, A)$ est une base de $\text{R}[A]$

On pose $Q(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det A$.
Alors Q est un polynôme annulateur de A .
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$; on effectue la division
euclidienne de P par Q , alors $\exists H \in \mathbb{R}[X]$
et $B \in \mathbb{R}[X]$ tq
 $P = Q \cdot B + H$ avec $\deg H \leq 1$
 $P(A) = Q(A) \cdot B(A) + H(A)$
"0

$$= 1 + (A)$$

avec $H(x) = ax + b$

D'où: $P(A) = aA + bI_e$

Ce qui montre que $\mathbb{R}[A] \subset \text{vect}(I, A)$.

D'autre part on a: $A \in \mathcal{R}(A)$ et $I \in \mathcal{R}(A)$.

$$\Rightarrow \text{Vect}(\{f_n, A\}) \subset \mathcal{R}[A]$$

A in $\mathbb{R}^n$: $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$.

3) $B \in \mathbb{R}[A] \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ s.t. } B = aA + bI$

$$\partial_a B^e = a^2 A^e + b^e \Gamma_a + 2ab A.$$

$$= a^2 ((bA)A \det A \cdot I_2) + b^2 I_2 + 2abA.$$

$$= (2ab + a^2 \chi(A)) \cdot A + (\det A + b^2) \cdot I_2$$

D'où $B^e = -I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b(A) + eab = 0 \\ b^2 - a^2 \det A = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a \operatorname{tr}(A) + b) = 0 \\ b^2 - a^2 \det A = -1 \end{cases}$$

$a \neq 0$ can B non scalar.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{a}{e} \ln(A) \\ b^e - a^e \ln(A) = -b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{a}{2} \operatorname{tr}(A) \\ \frac{a^2}{4} (\operatorname{tr}(A))^2 - a^2 \det A = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \left(\frac{(\operatorname{tr}(A))^2}{4} - \det A \right) = -1 \\ b = -\frac{a}{2} \operatorname{tr}(A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\operatorname{tr}(A))^2}{4} - \det A \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tr}(A))^2 \leq 4 \det A.$$

4) On suppose que $B^2 = -I_2$.

On a $I_2 \in \operatorname{IRCAT}$, $B \in \operatorname{IRCAT}$

soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\alpha I_2 + \beta B = 0_2$

si $\beta \neq 0 \Rightarrow B = -\frac{\alpha}{\beta} I_2 \Rightarrow B^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} I_2$

or $B^2 = -I_2 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} = -1$ imp

• Alors $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\Rightarrow (I_2, B)$ libre dans IRCAT .

Comme $\dim(\operatorname{IRCAT}) = 2$.

Alors (I_2, B) base de IRCAT .

b) $f: \operatorname{IRCAT} \rightarrow \mathbb{C}$ linéaire telle que.

$f(I_2) = 1$ et $f(B) = i$.

on a f est linéaire.

soit $\pi, \nu \in \operatorname{IRCAT}$, mq $f(\pi + \nu) = f(\pi) + f(\nu)$

on a (I_2, B) base de $\operatorname{IRCAT} \Rightarrow$

$$\pi = a I_2 + b B$$

$$\nu = a' I_2 + b' B$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi \nu &= a a' I_2 + (b a' + a b') B + b b' B^2 \\ &= (a a' - b b') I_2 + (b a' + a b') B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\pi \nu) &= (a a' - b b') f(I_2) + (b a' + a b') f(B) \\ &= (a a' - b b') + i (b a' + a b'). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } f(\pi) \cdot f(\nu) &= (a + b i)(a' + b' i) \\ &= (a a' - b b') + i (b a' + a b') \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\pi \nu) = f(\pi) \cdot f(\nu).$$

$\Rightarrow f$ est un morphisme d'algèbres.

• D'autre part on a.

$$\begin{aligned} (I_2, B) &\text{ base de } \operatorname{IRCAT} \\ (1, i) &\text{ base de } \mathbb{C} \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow f \text{ transforme} \\ \text{une base en} \\ \text{une base} \end{array} \right.$$

$$f(I_2) = 1 \text{ et } f(B) = i$$

D'où f est bijective.

$\underline{\underline{Cf}}$ f est un isomorphisme d'algèbre.

$$\Leftrightarrow f^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \operatorname{IRCAT} \text{ isomorphisme d'algèbre} \Rightarrow \text{isomorphisme d'anneaux}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\mathbb{C}) = \operatorname{IRCAT}.$$

④

Comme $\mathbb{C}$ est un corps, alors $\mathbb{R}[A]$ est un corps.

Partie II

$(A, +, \cdot)$ une $\mathbb{R}$ -algèbre.
 $\dim E = n$.

1) $f_a: A \rightarrow A$
 $x \mapsto f_a(x) = ax$ $a \in A$

a) f_a linéaire.

b) si a est inversible.

$$\begin{aligned} \ker f_a &= \{x \in A \mid ax = 0_A\} \\ &= \{x \in A \mid x = 0\} \text{ car } a \text{ inv} \\ &= \{0_A\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_a$ injective. $\Rightarrow f_a$ bijective puisque $\dim A < \infty$.

• Supposons que f_a est bijective, alors
 Pour $1 \in A$, $\exists ! b \in A$ tel que $f_a(b) = 1$
 $\Leftrightarrow \exists ! b \in A$ tel que $ab = 1$
 $\Rightarrow a$ est inversible.
 (A est commutatif)

2) f_a est linéaire, d'où f_a morphisme d'algèbre $\Leftrightarrow f_a(1) = 1$
 et $f_a(xy) = f_a(x)f_a(y)$ (5)

$$\text{or } f_a(1) = a \Leftrightarrow a = 1$$

$$\begin{aligned} \varphi: A &\longrightarrow \Pi_n(\mathbb{R}) \\ a &\longmapsto \text{Mat}(f_a; B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \text{Mat}(f_1; B) \\ &= \text{Mat}(\text{Id}_A; B) = I_n \end{aligned}$$

$$\varphi(a+b) = \text{Mat}(f_{a+b}; B)$$

$$\begin{aligned} \text{or } f_{a+b}(x) &= (a+b)x \\ &= ax + bx = (af_a + f_b)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(a+b) &= \text{Mat}(af_a + f_b; B) \\ &= a \text{Mat}(f_a; B) + \text{Mat}(f_b; B) \\ &= a\varphi(1) + \varphi(b) \end{aligned}$$

$$\varphi(a \cdot b) = \text{Mat}(f_{a \cdot b}; B)$$

$$\begin{aligned} \text{or } f_{a \cdot b}(x) &= a \cdot b x \\ &= a(bx) = f_a(f_b(x)) \\ &= f_a \circ f_b(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(a \cdot b) &= \text{Mat}(f_a \circ f_b; B) \\ &= \text{Mat}(f_a; B) \cdot \text{Mat}(f_b; B) \\ &= \varphi(a) \cdot \varphi(b) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ morphisme d'algèbre.

$$a \in \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi(a) = 0_n \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{Mat}(f_a; B) = 0_n &\Leftrightarrow f_a = 0 \Rightarrow \\ f_a(1) = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow \varphi \text{ injective.} \end{aligned}$$

b) φ injective, Alors
 $\varphi: A \longrightarrow \varphi(A)$ est bijective.
 et on a φ morphisme d'Algebres.
 $\Rightarrow \varphi(A)$ une sous algebre de $M_n(\mathbb{R})$.
 $\Leftrightarrow A$ est isomorphe a $\varphi(A) =$ sous
 algebre de $M_n(\mathbb{R})$.

3) A sous algebre de $M_n(\mathbb{R})$

a) $\exists \pi$ non scalaire tq $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\pi) = \emptyset$
 $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq λ v.p de π
 $\Rightarrow \pi - \lambda I_n$ non inversible.
 $\Rightarrow A$ n'est pas corps

b) soit $A \neq 0, A \in A$.
 on pose $f_A: A \longrightarrow A$
 $\pi \mapsto f_A(\pi) = A \cdot \pi$
 f_A est un endomorphisme
 $\cdot$ Soit $\pi \in \ker f_A \Leftrightarrow A\pi = 0 \Rightarrow \pi = 0$
 car $A \neq 0$ et A integre
 $\Rightarrow f_A$ injective.
 Comme $\dim A < \infty \Rightarrow f_A$ est bijective.
 $\Rightarrow$ pour $\pi_n \in A$ tq $f_A(\pi) = I_n$
 $\Leftrightarrow A\pi = I_n$
 $\Rightarrow A$ corps $\Rightarrow A$ inversible

⑥

Exercice 2.

- 1) $I \neq \{0_A\}$; I idéal de A .
 $x, y \in A$; $x R y \Leftrightarrow x - y \in I$.
 Π_9 R est une relation d'équivalence.
 $\forall x \in A$, $x - x = 0_A \in I \Leftrightarrow x R y \Leftrightarrow R$
 Soit $x, y \in A$ tq $x R y \Leftrightarrow x - y \in I$
 $\Leftrightarrow y - x \in I$
 $\Leftrightarrow y R x$

$\Rightarrow R$ est symétrique.

- Soient $x, y, z \in I$ tq $x R y$ et $y R z$
 $\Leftrightarrow x - y \in I$ et $y - z \in I$
 I idéal $\Rightarrow x - y + y - z \in I \Rightarrow x - z \in I$
 $\Rightarrow x R z \Rightarrow R$ est transitive.

$$A/I = \{ \bar{x}; x \in I \}$$

- 2) App la définition d'un anneau.
 $\Rightarrow (A/I, +, \times)$ est un anneau commutatif.

- 3) a) Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$, alors I est un (premier) $I \neq \{0\}$
 $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq}$

$I = n\mathbb{Z}$. Π_9 n est premier.
 Soit d un diviseur de $n \Rightarrow \exists n' \in \mathbb{Z} \text{ tq}$
 $n = dn'$

$n \in n\mathbb{Z} \Rightarrow dn' \in n\mathbb{Z}$.
 Comme $n\mathbb{Z}$ est un idéal premier, alors
 $d \in n\mathbb{Z}$ ou $n' \in n\mathbb{Z}$
 $\Rightarrow n \mid d$ ou $n \mid n'$

$\Downarrow$
 $d = n$ ou $n' = n \Rightarrow d = 1$
 $\Rightarrow d = n$ ou $d = 1 \Rightarrow n$ est premier.
 Alors les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ avec n premier.

- b) Soit $I \neq \{0\}$ un idéal premier de $K[X]$.
 Alors $\exists P \neq 0 \text{ tq } I = P \cdot K[X]$

Π_9 P est irréductible dans $K[X]$.

Soit $Q \in K[X] \text{ tq } Q/P \Rightarrow \exists A \in K[X]$
 $\text{tq } P = A \cdot Q \in I$

Puisque I est premier $\Rightarrow A \in I$ ou $Q \in I$

$\Rightarrow A \in P \cdot K[X]$ ou $Q \in P \cdot K[X]$

$\Rightarrow P$ divise A ou P divise Q .
 ou A divise P et on a $Q/P \Rightarrow$
 $Q = \alpha P; \alpha \in K$

$\Rightarrow A = \beta P \cdot (\beta \neq 0)$

$\Rightarrow P = \beta P \cdot Q$

$\Rightarrow \beta \cdot Q = 1 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{\beta}$

$\Rightarrow Q = c \cdot 1$

$\Rightarrow P$ est irréductible.

c) I premier $\Leftrightarrow \forall a, b \in A$ si
 $ab \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$
 $\Leftrightarrow \overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0} \Rightarrow \overline{a} = \overline{0}$
 ou $\overline{b} = \overline{0}$
 $\Leftrightarrow A/I$ intègre.

d) I premier.

a) soit $a \in A$;
 Il y a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $a^n \in I$, alors $a \in I$.

Pour $n=1$, $a \in I$. Vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $a^n \in I \Rightarrow a \in I$.
 Montrons pour $n+1$.

Si $a^{n+1} \in I \Leftrightarrow a \cdot a^n \in I$.

Comme I est premier, alors $a \in I$ ou $a^n \in I$
 $\Downarrow$ H.R
 $a \in I$

$\Rightarrow a \in I$

b) $\text{nil}(A) = \{a \in A; \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0\}$

* $\text{nil}(A) \subset A$;

* $0 \in \text{nil}(A)$

* Soient $a, b \in \text{nil}(A) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0$
 $\exists p \in \mathbb{N}, b^p = 0$

$$(a-b)^{n+p+1} = \sum_{k=0}^{n+p+1} C_{n+p+1}^k a^k b^{n+p+1-k}$$

$$(a-b)^{n+p+1} = \sum_{k=0}^{n+p+1} C_{n+p+1}^k a^k b^{n+p+1-k}$$

$$\forall n, n+k \leq n+p+1, a^k = 0 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p+1} C_{n+p+1}^k a^k b^{n+p+1-k} = 0$$

$$\text{si } 0 \leq k \leq n, \quad p+1 \leq n+p-k \leq n+p+1$$

$$\Rightarrow b^{n+p-k} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n+p+1} C_{n+p+1}^k a^k b^{n+p+1-k} = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^{n+p+1} = 0 \Rightarrow a-b \in \text{nil}(A)$$

* soit $x \in A$ et $a \in \text{nil}(A) \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 0$

$$\Rightarrow (x \cdot a)^n = x^n \cdot a^n \Rightarrow x \cdot a \in \text{nil}(A)$$

Ainsi $\text{nil}(A)$ est un idéal de A .

c) soit I un idéal premier, alors $\text{nil}(A) \subset I$.

Soit $a \in \text{nil}(A) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0$

$$\Rightarrow a^n \in I \Rightarrow a \in I \text{ d'après a).}$$

$$\Rightarrow \text{nil}(A) \subset I.$$

d) $\varphi: A \rightarrow B$ morphisme d'anneaux.

a) soit J idéal de B , alors $\varphi^{-1}(J)$ idéal de A .

Ena. J idéal de $B \Rightarrow J$ s.g de B

et φ morphisme d'anneaux, alors φ

morphisme de groupes $\Rightarrow \varphi^{-1}(J)$ est

un s.g de A .

(f)

Soit $x \in \varphi^{-1}(\mathcal{I})$ et $a \in A$, mg $x \cdot a \in \varphi^{-1}(\mathcal{I})$
 $\varphi(x) \in \mathcal{I}$

On a $\varphi(x \cdot a) = \underbrace{\varphi(x)}_{\in \mathcal{I}} \cdot \underbrace{\varphi(a)}_{\in B} \in \mathcal{I} \text{ (}\mathcal{I} \text{ idéal de } B\text{)}$
 $\Rightarrow x \cdot a \in \varphi^{-1}(\mathcal{I})$

Ainsi $\varphi^{-1}(\mathcal{I})$ est un idéal de A .

b) Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier de B , alors $\varphi^{-1}(\mathcal{I})$ est un idéal de A .

Soit $a, b \in A$ tq $a \cdot b \in \varphi^{-1}(\mathcal{I}) \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(a \cdot b) \in \mathcal{I} \\ \varphi(a) \cdot \varphi(b) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{premier}} \left\{ \begin{array}{l} \varphi(a) \in \mathcal{I} \\ \text{ou } \varphi(b) \in \mathcal{I} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow a \in \varphi^{-1}(\mathcal{I}) \text{ ou } b \in \varphi^{-1}(\mathcal{I})$$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{I})$ premier.

c) $\mathcal{I}$ idéal de A et φ surjective.

mq $\varphi(\mathcal{I})$ idéal de B .

$\mathcal{I}$ idéal de $A \Rightarrow \mathcal{I} \cap \mathcal{K}$ de A et

φ morphisme de groupes $\Rightarrow \varphi(\mathcal{I}) \cap \mathcal{K}$ de B .

Soit $y \in \varphi(\mathcal{I})$ et $y \in \mathcal{K}$

Comme φ surjective $\Rightarrow \exists x \in A$ tq $y = \varphi(x)$

$b \in \varphi(\mathcal{I}) \Rightarrow \exists a \in \mathcal{I}; b = \varphi(a)$

$$\begin{aligned} b \cdot y &= \varphi(a) \cdot \varphi(x) \\ &= \varphi(a \cdot x) \in \varphi(\mathcal{I}) \end{aligned}$$

($a \in \mathcal{I}, x \in A \Rightarrow a \cdot x \in \mathcal{I}$)

$\Rightarrow \varphi(\mathcal{I})$ idéal de B .