

1) Soit F un s.v. de E tq $E = \ker U \oplus F$

a) $\tilde{U}: F \rightarrow \text{Im } U$
 $x \mapsto U(x)$

- U est linéaire $\Rightarrow \tilde{U}$ est linéaire
- $\ker \tilde{U} = F \cap \ker U = \{0\} \Rightarrow \tilde{U}$ est injective
- $\forall y \in \text{Im } U = \text{Im } E - \dim \ker U = \dim \text{Im } U$ (th du rang)

Alors $\tilde{U}$ est bijective
 $\Rightarrow \tilde{U}$ est un isomorphisme

b) Si F est stable par U
 soit $y \in \text{Im } U \Rightarrow \exists x \in F$ tq $y = \tilde{U}(x)$ ($\tilde{U}$ bij)
 $\Rightarrow y = U(x)$. Or $x \in F \Rightarrow U(x) \in F \Rightarrow \text{Im } U \subseteq F$

De plus $\dim \text{Im } U = \dim F$ car $\tilde{U}$ bij
 Alors $F = \text{Im } U$

2) " $\Rightarrow$ " si $\ker U$ admet un supp F stable par U , d'a

1) $\text{Im } U = F \Rightarrow E = \ker U \oplus \text{Im } U$

" $\Leftarrow$ " hyp $E = \ker U \oplus \text{Im } U$, alors $F = \text{Im } U$ est un
 stable par U et supplémentaire de $\ker U$.

3) $\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tq $\Pi(U, U^2) =$
 soit $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker U \Leftrightarrow \Pi x = 0_3 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Rightarrow \ker U = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Im } U \cap \ker U \neq \{0\} \\ \text{Im } U = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right.$

$\Rightarrow E \neq \ker U \oplus \text{Im } U \Rightarrow \ker U$ n'admet pas un sup

II 4) soit $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ avec $e_i \in \bigcup_{p \in P} V_p$ de U
 $\forall i \in \{1, \dots, p\} \quad U(e_i) = \lambda_i e_i \in F \Rightarrow F \text{ stable par } U$

5) soit F un s.e.v de E stable par U
 on pose $U_F: F \rightarrow F$ l'endo induit par U
 Puisque U est diagonalisable, alors U_F est diagonalisable
 $\Rightarrow F = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(U_F)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les v.p de U_F
 et $e_i \in F$

Notons que si λ_i n'est pas v.p de $U_F \Rightarrow E_{\lambda_i}(U_F) = \{0\}$
 D'autre part on a $E_{\lambda_i}(U_F) = E_{\lambda_i}(U) \cap F$
 on considère G_i un s.e.v de $E_{\lambda_i}(U)$ tq. $E_{\lambda_i}(U) = G_i \oplus E_{\lambda_i}(U_F)$
 on pose $G = \bigoplus_{i=1}^p G_i$

Alors puisque $G_i \subset E_{\lambda_i}(U) \Rightarrow G_i$ est engendré par
 une famille de $V_p \Rightarrow G_i$ est stable par U
 $\Rightarrow G = \bigoplus_{i=1}^p G_i$ est stable par U
 D'après pr $G \oplus F = \bigoplus_{i=1}^p G_i \oplus \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(U_F)$

$$= \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(U) \oplus G_i$$

$$= \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(U) = E \quad \text{car } U \text{ diagonalisable}$$

$\Rightarrow U$ est semi-simple

6) Puisque U est diagonalisable, d'après 5, U est semi-simple
 $\Rightarrow \ker U$ admet un supp stable par U , d'après 5) $E = \ker U \oplus \text{Im } U$

III 7) $X_U(x) = (x+2)(x^2+1)$

8) on a $e = (1, 0, 1)$ vérifie $U(e) = -e \Rightarrow D = \text{vect}(e)$ est stable par U .

Supp $\exists D' = \text{vect}(e')$ tq $0 \neq D'$ et D' stable par U
 $\Rightarrow U(e') = \lambda e'$ avec $\lambda \neq -2$ car si non (e, e') est liée
 $\Rightarrow \lambda \forall p$ racine de X_U ($\lambda \neq -2$) absurde

$e = (2, 0, 1) : P = \text{vect}(e, U(e))$
 on a $U(e) \in P$ et $U(U(e)) = -e \in P$

F un plan stable par U
 soit $x \in F \cap P \Rightarrow U(x) \in F$ car F stable par U $\Rightarrow U(x) \in F \cap P$
 et $U(x) \in P \cap P \Rightarrow P$
 $\Rightarrow F \cap P$ est stable par U

Donc $F \cap P = \text{droite ou plan}$

Si $F \cap P = \text{droite} \Rightarrow F \cap P = D \Rightarrow D \subset P$

Alors $F \cap P = \text{plan} \Rightarrow F = P$

11) D'après q/et 10) les sous espaces stables par U sont D ou P
 12) Soit X_U n'est pas scindé dans $(R[x], d'où U n'est pas diagonalisable$

Soit F un sous espace stable par U.
 Si $\dim F = 0 \Rightarrow F = \{0_E\} \Rightarrow E = \{0_E\} \oplus E$
 et E stable par U

Si $\dim F = 3 \Rightarrow$

Si $\dim F = 1 \Rightarrow F = D \exists P$ stable par U tq
 $E = D \oplus P$

car $(e, e, U(e))$ libre

Si $\dim F = 2 \Rightarrow \exists D$ stable par U tq
 $E = D \oplus P$
 $F = P$

Ainsi U est semi-simple.

IV) Soit $F = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(U)$

Donc $\forall i \in 1 \dots p$: $E_{\lambda_i}(U)$ est stable par U, alors F est stable par U.

14) soit $v \in V_P$ de U $\Rightarrow \exists \lambda \in P$ de U tq $U(v) = \lambda v$
 $\Rightarrow v \in E_{\lambda}(U) \Rightarrow v \in \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(U) = F$

15) $E = G \oplus F$

Puisque U n'est pas diagonalisable, alors.

$E \neq \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(U) = F \Rightarrow E \neq F \Rightarrow G \neq \{0_E\}$

b) Puisque G est stable par u , on pose

$U_G : G \longrightarrow G$ l'endomorphisme induit par u sur G

or X_{U_G} divise X_U et X_U est scindé, alors X_{U_G} est scindé

U_G admet au moins une V_p notée λ .

$\Rightarrow \exists x \neq 0 \in G$ tq $U_G(x) = \lambda x \Rightarrow U(x) = \lambda x$
 $\Rightarrow x \in F$

$\Rightarrow x \in G \cap F = \{0\}$ absurde