

Problème: "Structure et réduction".

Exercice I:

$$T_n(K) = \{ \pi \in M_n(K) \mid \pi \text{ est triangulaire sup.} \}$$

$$T_n(K) \subset M_n(K)$$

$$I_n \in T_n(K)$$

Soit $\lambda \in K$, $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in T_n(K)$

$$(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij} = 0, \forall i > j$$

$$\Rightarrow \lambda A + B \in T_n(K)$$

$$AB = (c_{ij})$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$i > j \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^j a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=j+1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\Rightarrow c_{ij} = 0, \forall i > j$$

$$\Rightarrow AB \in T_n(K)$$

$T_n(K)$ est algèbre de $M_n(K)$.

e) F se. v. de E q. d. $F = P$

$$A_F = \{ U \in \mathcal{L}(E) \mid U(F) \subset F \}$$

a) $A_F \subset \mathcal{L}(E)$

$I_E \in A_F$

$\forall U, V \in A_F$ et $\forall \lambda \in K$.

$$U(V) \subset F$$

$$V(U) \subset F$$

$$\Rightarrow (U \circ V)(F) \subset F$$

sp. v.

$$\Rightarrow \exists u \neq 0 \in L_F$$

$$\therefore U(F) \subset F \Rightarrow U(U(F)) \subset U(F) \subset F$$

$$\Rightarrow U \circ U \in L_F$$

$$\Rightarrow A_F \text{ normal closure of } \lambda(E)$$

b) Set $B = (e_1, \dots, e_n)$ basis of E .
 $\text{over } (e_1, \dots, e_p)$ basis of F .

$$U \in A_F \Leftrightarrow U(F) \subset F$$

$$\text{if } U \in A_F: U(e_k) \in F = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$$

$$\Leftrightarrow \text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} U(e_1) & \dots & U(e_p) & U(e_{p+1}) & \dots & U(e_n) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \varphi: A_F \longrightarrow \pi_p(K) \times \pi_{p-n-p}(K) \times \pi_{n-p}(K)$$

$$u \mapsto \varphi(u) = (A, C, D)$$

Soit $u, v \in A_F$ et $d \in K$.

$$\text{Nat}(u, B) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\text{Nat}(v, B) = \begin{pmatrix} A' & C' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Nat}(d(u+v)) = \begin{pmatrix} dA+A' & dC+C' \\ 0 & dD+D' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi(d(u+v)) = \begin{pmatrix} dA+A' & dC+C' & dD+D' \end{pmatrix}$$

$$= d(A, C, D) + (A', C', D')$$

$$= d\varphi(u) + \varphi(v)$$

$\Rightarrow \varphi$ est linéaire.

$$\text{soit } (A, C, D) \in \pi_p(K) \times \pi_{p-n-p}(K) \times \pi_{n-p}(K)$$

$$\Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \pi_n(K)$$

$$\Rightarrow \exists! u \in \mathcal{A}(E) \text{ tq. } \text{Nat}(u, B) = \pi.$$

D'après ce qui précède $u \in A_F$.

Donc φ est un isomorphisme.

Rappel.

B base de E

$$\text{L'app } \varphi: \mathcal{A}(E) \longrightarrow \pi_n(K)$$

$$u \mapsto \varphi(u) = \text{Nat}(u, B)$$

φ est un isomorphisme.

$$\pi = (m_{ij}) \Rightarrow \exists! u \in \mathcal{A}(E) \text{ tq.}$$

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{ij} e_i$$

ii) Geradenisomorphismus, also

$$\dim A_F = \dim \Pi_p(K) + \dim \Pi_{p(n-p)}(K) + \dim \Pi_{n-p}^{\perp}(K) \\ = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 \\ = n^2 - np + p^2$$

c) Sei $f(x) = n^2 - nx + x^2$; $x \in [1, n-1]$

$$f'(x) = 2x - n = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n}{2}$$

$$f(1) = f(n-1) = n^2 - n + 1$$

$\Rightarrow \max_{1 \leq p \leq n-1} n^2 - np + p^2$

p	1	$\frac{n}{2}$	$n-1$
f	-	+	+

$= n^2 - n + 1$

$$g) \Gamma(K) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in K \right\}$$

a) $\Gamma(K)$ est une sous-algèbre de $M_2(K)$

$$b) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_2(\mathbb{R})$$

$\chi_A = X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$

$\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \Gamma(\mathbb{R})$ " " "

$$c) \text{ Soit } \pi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \Gamma(\mathbb{C})$$

$$= aI_2 + bA.$$

$\chi_\pi(x) = x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ = scindé, donc π a des racines simples $\Rightarrow$ diagonalisable

$$\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ s.t.}$$

$$A = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow \pi = P \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix} P^{-1}$$

$\forall a, b$

$\Rightarrow \Gamma(\mathbb{C})$ est diagonalisable

Partie II.

$$A = \{ J(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}), a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C} \}$$

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & \\ & a_2 & a_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & & & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

$\varphi \in \mathcal{H}(A_n)$ b.

$$\varphi(e_j) = e_{j+1}, \forall j \in \{1, \dots, n-1\}$$

$$\varphi(e_n) = e_1$$

$$J = \text{Mat}(\varphi, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• on vérifie par récurrence q.o.

$$\begin{cases} \varphi^k(e_1) = e_{k+1} & \forall 1 \leq k \leq n-1 \\ \varphi^k(e_n) = e_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi^n = \text{id}_E \Leftrightarrow J^n = I_n.$$

$$* \forall 1 \leq k \leq n \Rightarrow J^k = ??$$

$$\begin{cases} \varphi^k(e_j) = e_{k+j}, & \forall 1 \leq j \leq n-k \\ \varphi^k(e_j) = e_{k+j-n}, & n-k+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

ex $\forall 1 \leq j \leq n-k;$
 $n-k+1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \varphi^k(e_j) &= \varphi^k \varphi^{n-k}(e_j) = \varphi^{kn}(e_j) = e_{kn+j} \\ \varphi^k(e_j) &= \varphi^k \varphi^j(e_n) = \varphi^{kj}(e_n) = e_{kj} \\ &= \varphi^{kn+j-n}(e_n) = \varphi^{kn+j-n}(e_n) = e_{kn+j-n} \\ &= e_{kn+j-n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J^k = \text{Mat}(\varphi^k, B) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$s \leq n \Rightarrow k = k_1 + r \Rightarrow J^k = J^{k_1} J^r$$

$$2) \forall \Pi = J(a_0 - a_{n-1}) \in \mathcal{A} \\ = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \text{vect}(I, J, J^2, \dots, J^{n-1})$$

$$\text{Satz } a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C} \text{ tq. } \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k = a_n$$

$$\Rightarrow J(a_0 - a_{n-1}) = a_n$$

$$\Rightarrow k \leq n-1, a_k = 0$$

$$B = (I, J, \dots, J^{n-1}) \text{ base de } \mathcal{A}$$

$$3) \text{ Act } \mathcal{A} \text{ sur } \mathbb{C} \\ I_n \in \mathcal{A} = \text{vect}(I_n, \dots, J^{n-1})$$

$$\mathcal{A} \text{ est une s.e.v. de } M_n(\mathbb{C})$$

$$\text{Satz } \Pi = J(a_0 - a_{n-1}) \in \mathcal{A}$$

$$\Pi' = J(b_0 - b_{n-1}) \in \mathcal{A}$$

$$\Pi \cdot \Pi' = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) \left(\sum_{p=0}^{n-1} b_p J^p \right)$$

$$= \sum_{0 \leq k, p \leq n-1} a_k b_p J^{k+p}$$

$$\text{or } k' \in \mathbb{N}; (J)^{k'} \in \text{vect}(I, J, \dots, J^{n-1})$$

$$\Rightarrow \Pi \cdot \Pi' \in \text{vect}(I, J, \dots, J^{n-1}) = \mathcal{A}$$

$$\text{et on a } \Pi \cdot \Pi' = \Pi' \cdot \Pi \\ \Rightarrow \mathcal{A} \text{ est une alg\`ebre commutative}$$

$$\text{de } M_n(\mathbb{C})$$

4) a) on a $J^n = I_n \Rightarrow \Phi(X) = X^n - 1$
 est un polynôme annulateur. Comme Φ est séparable,
 Simple $\Rightarrow J$ est diagonalisable.

b) on a J est diagonalisable
 $\Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $J = P D P^{-1}$.
 $\forall \pi \in \mathcal{A}$, on a $\pi = \sum_{h=0}^{n-1} a_h J^h = H(J)$
 avec $H(X) = \sum_{h=0}^{n-1} a_h X^h$.
 $\Rightarrow \pi = P H(D) P^{-1}$, $\forall \pi \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow H$ est diagonalisable
 et $S_P(\pi) = \{ H(d_i) \}$, avec d_i les valeurs propres de J .

$S_P(J) \subset \{ \text{racines } d_i \text{ de } \Phi \}$
 $\subset \{ d_k = e^{\frac{2\pi i k}{n}}, 0 \leq k \leq n-1 \}$.

$$J v = d_k v.$$

$\vdots$

$$\exists v \neq 0$$

$$E_{d_k}(J) \neq \{0\}.$$

Problème "Endo-semisimple".

1) $E = \ker U \oplus F$.

a) $\tilde{U} : F \rightarrow \text{Im } U$ est un isomorphisme $x \mapsto U(x)$.

- U est linéaire $\Rightarrow \tilde{U}$ est linéaire
- $\ker \tilde{U} = F \cap \ker U = \{0\} \Rightarrow \tilde{U}$ injective
- donc F est E-dimension $\frac{\text{th.}}{\text{rang}}$ de $\text{Im } U$

$\Rightarrow \tilde{U}$ est bijective

b) si F est stable par U .

$\forall x \in F: U(x) \in F$

$\text{Im}(\tilde{U}) \subset F$

$\Rightarrow \text{Im } U \subset F$. $\text{Im } U$ est stable par U .

et on a. $\text{Im } U = F$.

$\Rightarrow \text{Im } U = F$.

c) " $\Leftarrow$ " évident.

" $\Rightarrow$ " si $\ker U$ admet un supp stable par U .

Alors d'après 1-1) $\text{Im } U = F$

$\Rightarrow E = \text{Im } U \oplus \ker U$.

d) on a. $U(e_1) = 0 \Rightarrow e_1 \in \ker U$

$U(e_2) = e_1 \Rightarrow e_1 \in \text{Im } U$

$\Rightarrow \text{Im } U \cap \ker U \neq \{0\} \Rightarrow \ker U \cap \text{Im } U$

ne sont pas en somme directe.

$\Rightarrow \ker U$ n'est pas un supp stable.

II) Soit $F = \text{vect}(v_1, \dots, v_p)$

avec $v_i \in V_p$ d.o. W ($W(v_i) = \lambda_i v_i$)

$$\Rightarrow W(v_i) \in F, \forall i \in \{1, \dots, p\}$$

$$\Rightarrow W(F) \subset F.$$

5) Tr. si W est diagonalisable.

Alors W est demi-simple.
 Soit F un sous-espace E-stable par W .

et W est diagonalisable $\Rightarrow \exists B = (v_1, \dots, v_n)$
 base de E for. de V_p d.o. W .

$$F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p) \left\{ \begin{array}{l} \text{soient } x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j \end{array} \right\} \Rightarrow F = \text{vect}(e_1, e_1, \dots, e_p)$$

$$\text{Soit } G = \text{vect}(e_{i_1}) \text{ et } e_{i_1} \in \{e_1, \dots, e_p\}$$

$$\Rightarrow E = F \oplus G.$$

Get stable par W .
 Soit $v \in V_p$ d.o. W .

$$\{e_{i_1}, \dots, e_{i_p}\} \cup \{e_1, \dots, e_p\}$$

Autrement on a. U est diag $\Rightarrow E = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U)$

F stable $\Rightarrow U_F: F \rightarrow F$ l'endomorphisme

U est diag $\Rightarrow U_F$ est diagonalisable

$$\Rightarrow F = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U_F) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } d_i \text{ n'est pas divisible par } p \\ \downarrow \\ E_{d_i}(U_F) = \{0\} \\ Sp(U_F) \subset Sp(U) \end{array} \right.$$

$$E_{d_i}(U_F) = F \cap E_{d_i}(U)$$

$E_{d_i}(U_F)$ est u.d. $E_{d_i}(U)$

$$\Rightarrow E_{d_i}(U) = E_{d_i}(U_F) \oplus G_i$$

G_i sous-u.d. $E_{d_i}(U) \Rightarrow G_i(U)$ est stable par U (d'après a)

on pose $G = \bigoplus_{i=1}^p G_i$ stable par U .

$$F \oplus G = \bigoplus_{i=1}^p (E_{d_i}(U_F) \oplus G_i) = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U) \times G_i = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U)$$

$$\Rightarrow F \oplus G = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U) = E.$$

c) U est diagonalisable $\Rightarrow$

U est semi-simple.

et $\ker U$ est stable par U

$\Rightarrow$ admet un supplémentaire stable d'après a) $E = \ker U \oplus \text{Im } U$.

IV)

U est semi-simple et

$$\chi_U(X) = \prod_{i=1}^p (X - d_i)^{m_i}$$

$$F = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U).$$

b.) on a. $E_{d_i}(U)$ est stable par U , $\forall i$ (c) $\Rightarrow F = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U)$ est stable par U .

14) soit $x \overline{v} p$ d.o. $U = \exists d \in (K) \text{ tel } U(x) = dx \Rightarrow x \in E_1(U) \subset \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U) = F$.

15) supp. U n'est pas diagonalisable.

$$F \oplus G = E.$$

a) si $G = \{0_E\} \Rightarrow F = E \Rightarrow U$ est diagonalisable
 $\Rightarrow G \neq \{0_E\}$.

b) $U_G: G \rightarrow G$ fendo univo.

ona. X_{U_G}/X_U
 et X_U est invid. $\Rightarrow X_{U_G}$ est invid.
 $\Rightarrow Sp(U_G) \neq \emptyset$

c) ona. $\exists d \overline{v} p$ d.o. $U_a \Rightarrow \exists x \in G \setminus \{0\} \text{ tel } U_a(x) = dx$
 $\Rightarrow x \overline{v} p$ d.o. $U \Rightarrow x \in F$
 $\Rightarrow x \in F \cap G = \{0\}$ supp.

Alors $G = \{0_E\}$

$$\Rightarrow E = F = \bigoplus_{i=1}^p E_{d_i}(U)$$

$\Rightarrow U$ est diagonalisable.

III) $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

7) $Y_u(X) = (X+u)(X^2+1)$

8) $e = (1, 0, 1), U(e) = -2e.$

$D = \text{vect}(e) \Rightarrow U(D) \subset D$

Supp $\exists D' = \text{vect}(e')$ stable par U

$\Rightarrow U(e') \in D' \Rightarrow U(e') = d e' \ (d \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \forall p \text{ vect. de } U \Rightarrow d = -2$

$\Rightarrow e' \in \text{vect}(e)$
 $\Rightarrow D = D'$

D : droite vectorielle stable par $U \Leftrightarrow \text{Sp}(U) \neq \emptyset$

9) $E = (e_1, e_2, e_3), P = \text{vect}(e_1, U(e_1))$

P est stable par U .

$\begin{cases} U(e) \in P \\ U^2(e) = -U(e) \in P \end{cases}$

$\Rightarrow P$ est stable par U

10) F est plan stable par U
 (donc $F = \mathbb{R}^2$)

et P stable par U , alors

$F \cap P$ est stable par U

• Supp $F \neq P$

$\Rightarrow F \cap P =$ droite vectorielle P .

(donc $F \cap P = 1$ ou 2 ou 0)

si $F \cap P = 1$

$F \cap P =$ droite

et $F \cap P$ stable par U

$\Rightarrow F \cap P = D$

$\Rightarrow e \in P$ i.e.

si $F \cap P = 2$

$F \cap P \subset P$

$F \cap P = P$

$$\text{Ex: } F \cap P = \{0\}$$

$$\dim(F \oplus P) = \dim F + \dim P = 4. \quad \dim \mathbb{R}^3$$

$\text{car } P$

1.1) Les sous-espaces stables par ψ
 $\{0\} \in \{D, \text{ et } P\}$

1.2) X_ψ n'est pas surjectif sur $\mathbb{R}(X)$
 $\Rightarrow \psi$ n'est pas diagonalisable.

$\forall F$ sous-espace stable par ψ
 $\exists G$ supp. de F .

$$\text{Si } F = D \Rightarrow E = P \cup F$$

$$F = P \Rightarrow E = D \cup P$$