

Série : Groupe-Sous groupe

Exercice 1 "Questions de Cours".

Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre noté e et $a \in G$.

- On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$.
 - Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^p = e$ et $a^k \neq e, \forall k \leq p-1$.
On note $p = o(a)$.
 - Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a^m = e \iff o(a) \mid m$.
- Montrer que si $(G, .)$ un groupe monogène, alors G est abélien.
- Soit $x \in G$ un élément d'ordre fini.
Montrer que $o(x) = \text{card} \langle x \rangle$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \{z \in \mathbb{C}, \text{tel que } z^n = 1\}$.
Montrer que U_n est cyclique.
- Soit $(G', *)$ un groupe et $f : (G, .) \rightarrow (G', *)$ est un morphisme de groupes.
Montrer que :
 - $f(e_G) = e_{G'}$.
 - $\forall x \in G, f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
 - Si H est un sous groupe de G , alors $f(H)$ est un sous groupe de G' .
 - Si K est un sous groupe de G' , alors $f^{-1}(K)$ est un sous groupe de G .
 - $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G .
 - $\text{Im}(f)$ est un sous-groupe de G' .

Exercice 2 1. Soit $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \text{tel que } {}^t A = A\}$.
Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(M_n(\mathbb{R}), +)$.

- On pose $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \text{tel que } {}^t A A = I_n\}$.
Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

- Soit $O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}), \text{tel que } \det(A) = 1\}$.

Montrer que $O_n^+(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

- L'ensemble $O_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}), \text{tel que } \det(A) = -1\}$ est-il un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$?

Exercice 3 Soit $(G, .)$ un groupe d'élément neutre noté e . On note $B(G)$ l'ensemble des bijections de G . Pour $a \in G$, on pose

$$f_a : G \rightarrow G \\ x \mapsto axa^{-1}$$

- Montrer que $(B(G), \circ)$ est un groupe.
- Montrer f_a est un automorphisme du groupe $(G, .)$
- On pose $G' = \{f_a, a \in G\}$.
Montrer que G' est un sous-groupe de $B(G)$.
On définit l'application

$$\psi : G \rightarrow G' \\ a \mapsto f_a$$

- Montrer que ψ est un morphisme de groupes
- Soit $x \in G$. On pose $C_x = \{y \in G \text{ tel que } xy = yx\}$.
 - Montrer C_x est un sous-groupe de G .
 - Déterminer $\text{ker}(\psi)$ puis déduire que ψ est injective si et seulement si $\bigcap_{x \in G} C_x = \{e\}$.
 - ψ est-elle surjective ?

Exercice 4 Soit $(G, .)$ un groupe cyclique de cardinal n avec $G = \langle a \rangle$. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, On considère

$$f : G \longrightarrow G \\ x \longmapsto x^r$$

1. Montrer que f est un morphisme du groupe G .
2. Soit $d = \text{pgcd}(n, r)$.
a) Montrer que $\ker(f) = \langle a^{n'} \rangle$ avec $n = dn'$.
b) Montrer que $\text{Im}(f) = \langle a^d \rangle$.
3. Pour $y \in G$, combien l'équation $x^r = y$ possède-t-elle de solutions ?

Exercice 5 (Théorème de Lagrange).

Soient $(G, .)$ un groupe fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, d'élément neutre noté e et H un sous-groupe de G .

On considère $\mathcal{R}$ la relation sur G définie par :

$$x \mathcal{R} y \iff xy^{-1} \in H.$$

1. a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G .
b) Déterminer pour $a \in G$, $cl_{\mathcal{R}}(a)$ la classe d'équivalence de a selon la relation $\mathcal{R}$.
2. Montrer que l'application

$$f_a : H \longrightarrow cl_{\mathcal{R}}(a) \\ x \longmapsto x.a$$

est une bijection.

3. En déduire que $\text{card}(H)$ divise $\text{card}(G)$.

4. Montrer que si $(G, .)$ un groupe fini avec $\text{card}(G) = n$, alors pour tout $a \in G$, $a^n = e$ et l'ordre de a divise n .

5. On suppose que $n = 2p + 1$ et on considère un entier m tel que m divise $2p$.

- a) Montrer que l'application $f : G \longrightarrow G$ $x \longmapsto x^m$ est bijective.
- b) Montrer que si G est abélien, alors f est un automorphisme du groupe G .

Exercice 6 Soient $(G, .)$ un groupe et A un sous ensemble de G . On pose $C(A) = \{x \in G \text{ tel que } xa = ax, \forall a \in A\}$: Centralisateur de A
 $N(A) = \{x \in G \text{ tel que } xA = Ax, \forall x \in G\}$: Normalisateur de A .
(On rappelle que xA est l'ensemble $xA = \{xa, a \in A\} \subset G$.)

Un sous-groupe H de G est dit distingué dans G si

$$\forall h \in H, xhx^{-1} \in H, \forall x \in G.$$

1. Montrer que $C(A)$ et $N(A)$ sont deux sous-groupes de G .
2. Montrer que A est un sous-groupe distingué dans G si et seulement si $N(A) = G$.
3. Soit $\varphi : (G, .) \longrightarrow (G', .)$ un morphisme de groupes. Montrer que $\ker \varphi$ est distingué dans G .
4. Soient H et K deux sous-groupes de $(G, .)$. On pose

$$HK = \{xy, x \in H \text{ et } y \in K\}.$$

Montrer que si H est distingué dans G , alors HK est un sous-groupe de G .

Exercice 7

Soit G un groupe cyclique.

1) $\forall q$ tout s.-g de G est cyclique.

2) $\forall q$ si d divise $\text{card}(G)$, alors il existe un unique s.-g de G de $\text{card}(H) = d$.