

Exercice 1 "Questions de Cours".

1. Soit $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux et $f : (A, +, \times) \rightarrow (B, +, \times)$ un morphisme d'anneaux. Montrer que
 - i) $f(0_A) = 0_B$.
 - ii) $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.
 - iii) $\forall k \in \mathbb{Z}, f(kx) = kf(x)$.
 - iii) $\forall k \in \mathbb{N}, f(x^k) = (f(x))^k$.
 - iv) Si x est inversible dans A , alors $f(x)$ est inversible dans B et $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.
2. a) Montrer que si A est commutatif, alors $\ker f$ est un idéal de A .
b) Montrer que $\text{Im } f$ est un sous-anneau de B .
3. Montrer que si I et J sont deux idéaux d'un anneau commutatif A , alors $I \cap J$ est un idéal de A .

Exercice 2 .

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Un élément x de A est dit nilpotent s'il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Soit $(x, y) \in A^2$. Montrez que si x et y sont deux éléments nilpotents de A alors $x \times y$ et $x + y$ sont nilpotents.
2. Montrez que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible et calculez son inverse.

Exercice 3 1. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On note l'ensemble des éléments inversibles $\mathcal{U}(A)$.
Montrer que $(\mathcal{U}(A), \times)$ est un groupe.

2. Déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{Z})$.

3. i) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $a \in \mathbb{Z}$, montrer que $\bar{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si les entiers a et n sont premiers entre eux.

ii) Dédurre $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

4. i) Montrer que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps si et seulement si p est un nombre premier.

ii) Dédurre si p est un nombre premier, alors pour tout $\bar{x} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ on a $\bar{x}^{p-1} = \bar{1}$.

5. a) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il intègre ? justifier votre réponse.

b) Montrer que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre si et seulement si p est un nombre premier.

Exercice 4 On pose

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

1. Montrer que l'addition "+" et la multiplication "." des complexes sont des lois de compositions interne dans $\mathbb{Z}[i]$.
2. Montre que $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ est un anneau commutatif et intègre.
3. $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ est-il un corps ?
4. En considérant l'application $N : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{N}$, $z \mapsto |z|^2$, Déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$, l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$

Exercice 5 .

I)

1. Soit $P \in IK[X]$. Montrer que $PIK[X] = \{PQ, Q \in IK[X]\}$ est un idéal de l'anneau $(IK[X], +, \times)$.

2. Soit I un idéal non nul de $(IK[X], +, \times)$. On pose $A = \{\deg P, P \in I \setminus \{0\}\}$

a) Justifier que $\min A$ existe. On notera $k = \min A$.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $Q \in IK[X]$ tel que $I = QIK[X]$.

3. Conclure.

II) On considère E un IK -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E . On admet qu'il existe un polynôme non nul noté χ_u vérifiant $\chi_u(u) = \bar{0}$.

ON considère $x \in E \setminus \{0_E\}$.

1. Soit $\mathcal{I}_x = \{P \in IK[X], P(u)(x) = 0_E\}$.

Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal non nul de $IK[X]$.

2. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal noté $\pi_{x,u} \in IK[X]$ tel que $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$.

3. a) Justifier que $\text{divise } \pi_{x,u}$ divise le polynôme minimal π_u .

b) Dédire que l'ensemble $\{\pi_{x,u}, x \in E \setminus \{0_E\}\}$ est fini.

4. Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$ tels que $\pi_{x,u} \wedge \pi_{y,u} = 1$.

Montrer que $x + y \neq 0$ et que $\pi_{x+y,u} = \pi_{x,u}\pi_{y,u}$.

Exercice 6 Soit α une racine complexe de l'équation $x^2 + x + 2 = 0$. On considère $\mathbb{Z}[\alpha]$ l'ensemble des nombres complexes défini par :

$$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

1. Vérifier que l'addition " + " et la multiplication " . " des réels sont des lois de compositions interne dans $\mathbb{Z}[\alpha]$

2. Montrer que $(\mathbb{Z}[\alpha], +, \cdot)$ est un sous-anneau commutatif de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

3. Montrer que si $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$, alors $\bar{z} \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

4. Montrer que si $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$, alors $\bar{z}z \in \mathbb{N}$.

5. Soit $z = a + b\alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$. Montrer que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ si et seulement si $a^2 + 2b^2 - ab = 1$.

6. Montrer que l'équation précédente n'admet pas de solutions lorsque $ab > 0$ ou bien $ab < 0$.

7. Dédire l'ensemble des éléments inversibles de $((\mathbb{Z}[\alpha])^*, \cdot)$.

Exercice 7 Soient K, L deux corps et f un morphisme d'anneaux entre K et L .

1. Montrer que $f(x)$ est inversible pour tout $x \in K^*$ et déterminer $(f(x))^{-1}$.

2. En déduire que tout morphisme de corps est injectif.

Exercice 8 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(n)$ le nombre d'éléments inversibles dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$. c.a.d

$$\varphi(n) = \text{card}\{1 \leq k \leq n \text{ tel que } k \wedge n = 1\}$$

φ est appelée fonction indicatrice d'Euler.

1. Soit p un nombre premier, calculer $\varphi(p)$ et $\varphi(p^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

2. Soient m et n deux entiers premiers entre eux. On considère l'application

$$f : \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ \bar{x} \longmapsto f(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{x})$$

a) Justifier que f est bien définie.

b) Montrer que f est un isomorphisme d'anneaux.

c) En déduire que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

d) Montrer que si $n = \prod_{i=1}^N p_i^{\alpha_i}$, alors $\varphi(n) = \prod_{i=1}^N p_i^{\alpha_i-1}(p_i - 1)$.

Exercice 9 Soient E un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{\bar{0}\}$.

On note $u^0 = \text{Id}_E$ et $u^k = u \circ \dots \circ u$ k -fois.

Pour tout polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in IK[X]$, on pose $P(u) =$