

Chapitre

Dérivation et intégration d'une fonction vectorielle

K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E, F, G, \dots$ désignent des K -espaces vectoriels de dimensions finies.

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

On étudie ici des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace de dimension finie

$$\text{Ex.} : t \mapsto z(t) \in \mathbb{C}, t \mapsto (x(t), y(t), \dots) \in \mathbb{R}^n, t \mapsto \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \dots$$

19.1 Dérivation

19.1.1 Vecteur dérivé

Définition

On dit que $f : I \rightarrow E$ est dérivable en $a \in I$ si le taux d'accroissement

$$\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a))$$

converge quand $h \rightarrow 0$ (avec $h \neq 0$)

Sa limite est alors appelée vecteur dérivé de f en a , on la note $f'(a)$.

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ et a élément de I . On a équivalence entre :

(i) $f : I \rightarrow E$ est dérivable en a ;

(ii) il existe $\ell \in E$ tel que

$$f(t) = f(a) + (t-a)\ell + (t-a)\varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} 0_E$$

De plus, on a alors $\ell = f'(a)$.

L'égalité asymptotique écrite dans (ii) s'appelle un développement limité à l'ordre 1 de f en a .

dém. :

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si f est dérivable en a on peut écrire, pour $t \neq a$

$$\frac{1}{t-a} (f(t) - f(a)) = f'(a) + \varepsilon(t)$$

Avec $\varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow a} 0$. On alors

$$f(t) - f(a) = (t-a)f'(a) + (t-a)\varepsilon(t)$$

et cette relation vaut aussi pour $t = a$ en posant $\varepsilon(a) = 0_E$. On obtient donc

$$f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + o(t-a)$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si $f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + o(t-a)$ alors

$$\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) = \frac{1}{h} (hf'(a) + h\varepsilon(a+h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)$$

□

Remarque On écrit alors

$$f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + o((t-a))$$

en introduisant le concept de fonction négligeable comme cela a été fait pour les fonctions réelles ou complexes.

Corollaire

Si f est dérivable en a alors f est aussi continue en a .

Remarque Si $t \mapsto f(t)$ est le paramétrage d'un mobile alors $f'(a)$ est le vecteur vitesse du mobile à l'instant $t = a$.

19.1.2 Dérivabilité à droite et à gauche

Définition

Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$ qui n'est pas extrémité droite de I . On dit que f est dérivable à droite en a si le taux d'accroissement

$$\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a))$$

converge quand $h \rightarrow 0^+$. Sa limite est appelée vecteur dérivé à droite de f en a . On le note $f'_d(a)$.

De façon analogue, on définit $f'_g(a)$ vecteur dérivé à gauche de f en a .

Proposition

Soit $f : I \rightarrow E$ et a élément intérieur à I . On a équivalence entre :

- (i) f est dérivable en a ;
- (ii) f est dérivable à droite et à gauche en a avec $f'_d(a) = f'_g(a)$.

19.1.3 Fonction dérivable

Définition

Une fonction $f : I \rightarrow E$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de I .

On peut alors introduire l'application

$$f' : \begin{cases} I \rightarrow E \\ t \in I \mapsto f'(t) \end{cases}$$

appelée fonction dérivée de f .

Proposition

Les fonctions dérivables de I vers E sont continues.

dém. :

Si $f : I \rightarrow E$ est dérivable alors f est continue en tout $a \in I$.

□

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ de fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ dans une base $e = (e_1, \dots, e_p)$ de E .

On a équivalence entre :

- (i) f est dérivable ;
- (ii) $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables.

De plus, si tel est le cas

$$\forall t \in I, f'(t) = \sum_{j=1}^p f'_j(t) \cdot e_j$$

dém. :

On a

$$\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{h} (f_j(a+h) - f_j(a)) \cdot e_j$$

La convergence de la fonction vectorielle en premier membre équivaut à la convergence des fonctions coordonnées mises en exergue dans le second membre.

□

Exemple $z : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable si, et seulement si, $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ le sont. On a alors

$$z'(t) = (\operatorname{Re} z)'(t) + i(\operatorname{Im} z)'(t)$$

Exemple $x : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ est dérivable si, et seulement si, $x_1, \dots, x_p$ le sont. On a alors

$$x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_p(t))$$

Exemple $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dérivable si, et seulement si, les fonctions coefficients $t \mapsto a_{i,j}(t)$ le sont. On a alors

$$A'(t) = \begin{pmatrix} a'_{1,1}(t) & \dots & a'_{1,p}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n,1}(t) & \dots & a'_{n,p}(t) \end{pmatrix}$$

19.1.4 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème

Soit $f, g : I \rightarrow E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si f et g sont dérivables alors λf et $f + g$ le sont aussi avec

$$(\lambda f)' = \lambda f', (f + g)' = f' + g'.$$

dém. :

Par opérations sur les limites ou par les fonctions coordonnées dans une base de E .

□

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{D}(I, E)$ des fonctions de I vers E dérivables est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$ et l'application $f \mapsto f'$ y est linéaire.

Théorème

Soit $\varphi : J \rightarrow I$ et $f : I \rightarrow E$.

Si f et φ sont dérivables alors $f \circ \varphi$ l'est aussi

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f' \circ \varphi$$

dém. :

Immédiat par les fonctions coordonnées dans une base de E .

□

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si f est dérivable alors $L(f) : t \mapsto L(f(t))$ est dérivable et

$$(L(f))' = L(f')$$

dém. :

Soit $a \in I$. Pour $h \neq 0$

$$\frac{1}{h} (L(f(a+h)) - L(f(a))) = L \left(\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)) \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} L(f'(a))$$

car L est continue puisque linéaire au départ d'un espace vectoriel de dimension finie.

□

Attention : Ici écrire la formule $(L(f))' = f' \times L'(f)$ n'a pas de sens car L' n'en a pas.

Exemple Si $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable alors $t \mapsto \text{tr}(A(t))$ est dérivable et

$$\frac{d}{dt} (\text{tr}(A(t))) = \text{tr}(A'(t))$$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$, $g : I \rightarrow F$ et $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire.

Si f et g sont dérivables alors $B(f, g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$$

dém. :

Soit $a \in I$. Pour $h \neq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} (B(f(a+h), g(a+h)) - B(f(a), g(a))) \\ &= B\left(\frac{1}{h} (f(a+h) - f(a)), g(a+h)\right) + B\left(f(a), \frac{1}{h} (g(a+h) - g(a))\right) \end{aligned}$$

Par continuité de l'application bilinéaire B ,

$$\frac{1}{h} (B(f(a+h), g(a+h)) - B(f(a), g(a))) \xrightarrow{h \rightarrow 0} B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$$

□

Corollaire

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow E$ sont dérivables alors $\alpha \cdot f$ aussi et

$$(\alpha \cdot f)' = \alpha' \cdot f + \alpha \cdot f'$$

dém. :

L'application produit extérieur $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ est bilinéaire.

□

Corollaire

On suppose que E est une algèbre.

Si $f, g : I \rightarrow E$ sont dérivables alors fg l'est aussi

$$(fg)' = f'g + fg'$$

En particulier, $\mathcal{D}(I, E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, E)$.

dém. :

L'application produit $E \times E \rightarrow E$ est bilinéaire.

□

Corollaire

On suppose E euclidien de produit scalaire $(\cdot | \cdot)$.

Si f, g sont dérivables alors $(f | g) : t \mapsto (f(t) | g(t))$ est dérivable et

$$(f | g)' = (f' | g) + (f | g')$$

dém. :

$(\cdot | \cdot)$ est une application bilinéaire.

□

19.1. DÉRIVATION

Théorème

Soit $f_1 : I \rightarrow E_1, \dots, f_p : I \rightarrow E_p$ et $m : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ multilinéaire.

Si $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables alors $m(f_1, \dots, f_p) : I \rightarrow F$ est dérivable et

$$m(f_1, \dots, f_p)' = \sum_{j=1}^p m(f_1, \dots, f_j', \dots, f_p)$$

Exemple Si $u, v, w : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables alors uvw aussi et

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Plus généralement, on a pour $f_1, \dots, f_p : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables, la relation

$$(f_1 \dots f_p)' = \sum_{i=1}^p f_1 \dots (f_i)' \dots f_p$$

Exemple Soit $A : t \mapsto A(t)$ une fonction dérivable de I vers $M_n(\mathbb{K})$.

La fonction $t \mapsto \det A(t)$ est dérivable car

$$\det A(t) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}(t)$$

Exprimons la dérivée de $t \mapsto \det A(t)$.

Notons $C_1(t), \dots, C_n(t)$ les colonnes de $A(t)$ et $E = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Les fonctions $C_1, \dots, C_n$ sont dérivables et puisque

$$\det(A(t)) = \det_E(C_1(t), \dots, C_n(t))$$

avec $\det_E$ application multilinéaire, on a

$$\frac{d}{dt} (\det A(t)) = \sum_{i=1}^n \det_E(C_1(t), \dots, C_i'(t), \dots, C_n(t))$$

Exemple $\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'(t) & b(t) \\ c'(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b'(t) \\ c(t) & d'(t) \end{vmatrix}$

Remarque On pourrait aussi raisonner par ligne plutôt que par colonne.

19.1.5 Dérivées d'ordres supérieurs.

Définition

Soit $f : I \rightarrow E$.

On pose $f^{(0)} = f$ appelée dérivée d'ordre 0 de f .

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $f^{(n)}$ existe et est dérivable, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ appelée dérivée d'ordre $n+1$ de f .

On dit que $f : I \rightarrow E$ est n fois dérivable si $f^{(n)}$ existe.

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ de fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ dans une base $e = (e_1, \dots, e_p)$ de E .

On a équivalence entre :

- (i) f est n fois dérivable ;
- (ii) $f_1, \dots, f_p$ sont n fois dérivables.

De plus, si tel est le cas :

$$\forall t \in I, f^{(n)}(t) = f_1^{(n)}(t).e_1 + \dots + f_p^{(n)}(t).e_p$$

dém. :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

□

Théorème

Soit $f, g : I \rightarrow E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si f et g sont n fois dérivables alors λf et $f + g$ le sont aussi et

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)} \text{ et } (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

dém. :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

□

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{D}^n(I, E)$ des fonctions n fois dérivables de I vers E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, E)$.

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ et $L \in \mathcal{L}(E, F)$.

Si f est n fois dérivable alors $L(f)$ aussi et

$$(L(f))^{(n)} = L(f^{(n)})$$

dém. :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

□

Théorème

Soit $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire.

Si $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ sont n fois dérivables alors $B(f, g)$ l'est aussi et

$$B(f, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(n-k)}, g^{(k)})$$

dém. :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$: ok.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 0$.

Soit $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ des fonctions $n+1$ fois dérivables.

Par hypothèse de récurrence $B(f, g)$ est n fois dérivable et

$$B(f, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(n-k)}, g^{(k)})$$

Or pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables donc $B(f^{(n-k)}, g^{(k)})$ aussi.

Par suite, $B(f, g)$ est $n+1$ fois dérivable et

$$B(f, g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [B(f^{(n+1-k)}, g^{(k)}) + B(f^{(n-k)}, g^{(k+1)})]$$

En séparant les deux sommes et par décalage d'indice

$$B(f, g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(n+1-k)}, g^{(k)}) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B(f^{(n+1-k)}, g^{(k)})$$

En adjoignant des termes nuls à chaque somme

$$B(f, g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} B(f^{(n+1-k)}, g^{(k)}) + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} B(f^{(n+1-k)}, g^{(k)})$$

En réunissant les deux sommes et par la formule du triangle de Pascal

$$B(f, g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B(f^{(n+1-k)}, g^{(k)})$$

Récurrence établie.

□

Corollaire

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : I \rightarrow E$ sont n fois dérivables alors $\alpha \cdot f$ aussi.

Corollaire

On suppose que E est une algèbre.

Si $f, g : I \rightarrow E$ sont n fois dérivables alors fg aussi.

En particulier, $\mathcal{D}^n(I, E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(I, E)$

Corollaire

Soit E un espace euclidien

Si $f, g : I \rightarrow E$ sont n fois dérivables alors $(f | g)$ aussi.

Exemple Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction $n + 1$ fois dérivable.

$$(t, f(t))^{(n+1)} = t, f^{(n+1)}(t) + (n+1)f^{(n)}(t)$$

19.1.6 Classe d'une fonction

Définition

Une fonction $f : I \rightarrow E$ est dite de classe C^n si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue.

Une fonction $f : I \rightarrow E$ est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les théorèmes présentés ci-dessus se transposent aux fonctions de classe C^n avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On en déduit :

Proposition

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : I \rightarrow E$ est de classe C^n si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de E le sont.

Théorème

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $C^n(I, E)$ des fonctions de classe C^n de I vers E est un sous-espace vectoriel (voire une sous-algèbre) de $\mathcal{F}(I, E)$.

19.2 Intégration sur un segment

19.2.1 Fonctions continues par morceaux

Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de l'espace E .

Définition

Une fonction $f : I \rightarrow E$ est dite continue par morceaux si ses fonctions coordonnées dans la base e le sont.

Proposition

La notion ne dépend pas du choix de la base e de E .

dém. :

Si $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)$ désigne une autre base de E et si P est la matrice de passage de e à $\tilde{e}$, la formule de changement de base

$$X = P\tilde{X} \text{ et } \tilde{X} = P^{-1}X,$$

montre que les fonctions coordonnées $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p$ de f dans $\tilde{e}$ sont combinaisons linéaires des fonctions coordonnées de f dans e . Si ces dernières sont continues par morceaux, ces premières aussi.

□

Théorème

L'ensemble $C_{pm}^0(I, E)$ des fonctions continues par morceaux de I dans E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(I, E)$.

dém. :

Par opérations sur les fonctions coordonnées.

□

19.2.2 Intégration entre deux bornes

Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de l'espace E .

Définition

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction continue par morceaux de fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ dans la base e .

Pour tout $a, b \in I$, on appelle intégrale de f de a à b le vecteur

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{j=1}^p \int_a^b f_j(t) dt \cdot e_j$$

Cette intégrale peut aussi être notée $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b]} f$ lorsque $a \leq b$.

Proposition

La valeur de l'intégrale ici définie ne dépend pas du choix de la base e de E .

dém. :

Considérons $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_p)$ une autre base de E et introduisons $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de e à $\tilde{e}$. On a

$$\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^p p_{i,j} e_i \text{ et } f(t) = \sum_{j=1}^p f_j(t) \cdot e_j = \sum_{j=1}^p \tilde{f}_j(t) \cdot \tilde{e}_j$$

et donc

$$\sum_{j=1}^p \int_a^b \tilde{f}_j(t) dt \cdot \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p p_{i,j} \int_a^b \tilde{f}_j(t) dt \cdot e_i = \sum_{i=1}^p \int_a^b \sum_{j=1}^p p_{i,j} \tilde{f}_j(t) dt \cdot e_i = \sum_{i=1}^p \int_a^b f_i(t) dt \cdot e_i$$

□

19.2.3 Opérations

Théorème

Soit $f, g : I \rightarrow E$ continues par morceaux, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $a, b \in I$

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

dém. :

Via les fonctions coordonnées dans une base de E .

□

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ continue par morceaux.

$$\forall a, b, c \in I, \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

dém. :

Via les fonctions coordonnées dans une base de E .

□

19.2.4 Sommes de Riemann

Théorème

Si $f : [a, b] \rightarrow E$ est continue par morceaux alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

dém. :

Via les fonctions coordonnées dans une base de E .

□

Remarque On a aussi

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Corollaire

En particulier, pour $f : [0, 1] \rightarrow E$ continue par morceaux

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ tendent vers } \int_0^1 f(t) dt$$

19.2.5 Inégalité triangulaire

Théorème

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux et $\|\cdot\|$ une norme sur E .

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leq \int_{[a,b]} \|f\|$$

dém. :

D'une part

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

19.3. INTÉGRALES ET PRIMITIVES

et d'autre part

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \|f(t)\| dt$$

Or par inégalité triangulaire

$$\left\| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\| f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right\|$$

On conclut par passage à la limite.

□

19.3 Intégrales et primitives

19.3.1 Primitive

Définition

On appelle primitive de $f : I \rightarrow E$, s'il en existe, toute fonction $F : I \rightarrow E$ dérivable vérifiant $F' = f$.

Remarque Les primitives de f peuvent se calculer à partir des fonctions coordonnées de f .

Théorème

Si $f : I \rightarrow E$ admet des primitives, celles-ci se déduisent les unes des autres par addition d'une constante vectorielle.

dém. :

Si F est primitive de f alors $F + C$ aussi car $(F + C)' = F' = f$.

Si F et G sont deux primitives de f alors $(F - G)' = 0$ donc $F - G$ est constante (car ses fonctions coordonnées le sont).

□

19.3.2 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$. Si f est continue alors f possède une unique primitive s'annulant en a , c'est la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

dém. :

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est définie de I vers E et s'annule en a .

Soit $x \in I$. Montrons

$$\frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

Soit $h > 0$.

$$\left\| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x) \right\| = \left\| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) - f(x) dt \right\| \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \|f(t) - f(x)\| dt$$

Puisque f est continue en x , pour $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in I, |t - x| \leq \alpha \Rightarrow \|f(t) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

et alors

$$0 < h \leq \alpha \Rightarrow t \in [x, x+h], \|f(t) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

et donc

$$0 < h \leq \alpha \Rightarrow \left\| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x) \right\| \leq \varepsilon$$

Ainsi

$$\frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f(x)$$

De même on montre

$$\frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} f(x)$$

□

Remarque On retient la formule

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

Corollaire

Si $f : I \rightarrow E$ est continue de primitive F alors

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b$$

dém. :

Pour tout $x \in I$, on a

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

car $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ et F sont primitives de f . En particulierisant en $x = b$, on obtient la relation voulue.

□

19.3.3 Changement de variable et intégration par parties

Théorème

Soit $\varphi : I \rightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : J \rightarrow E$ continue.

$$\forall a, b \in I, \int_a^b \varphi'(t) \cdot f(\varphi(t)) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds$$

La manipulation consistant à transformer une intégrale en l'autre est appelée changement de variable définie par la relation $s = \varphi(t)$.

dém. :

Soit F une primitive de la fonction continue f .

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s) ds = [F(s)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

On vérifie par les fonctions coordonnées que $F \circ \varphi$ est primitive de la fonction continue $\varphi' \cdot f \circ \varphi$ et donc

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = [F(\varphi(t))]_a^b$$

□

Théorème

Soit $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, $u : I \rightarrow E$ et $v : I \rightarrow F$ de classe C^1 .

$$\forall a, b \in I, \int_a^b B(u', v) = [B(u, v)]_a^b - \int_a^b B(u, v')$$

dém. :

Puisque la dérivée de $B(u, v)$ est $B(u', v) + B(u, v')$,

$$\int_a^b B(u', v) + \int_a^b B(u, v') = \int_a^b (B(u, v))' = [B(u, v)]_a^b$$

□

19.3.4 Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ de classe C^1 . S'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\forall t \in I, \|f'(t)\| \leq M$$

alors

$$\forall a, b \in I, \|f(b) - f(a)\| \leq M |b - a|$$

En d'autres termes, la fonction f est lipschitzienne.

dém. :

Puisque f est de classe C^1 , on peut écrire

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Cas $a \leq b$

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

et donc

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b M dt = M(b - a)$$

Cas $a > b$: analogue.

□

19.3.5 Formules de Taylor

19.3.5.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$. Si f est de classe C^{n+1}

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

dém. :

Par récurrence en exploitant l'intégration par parties

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

□

Remarque Cette formule constitue une généralisation de l'identité

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Remarque Par le changement de variable affine $t = a + (x-a)u$, on peut réécrire le reste intégral

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = (x-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + (x-a)u) du$$

Cette nouvelle écriture permet de mieux appréhender l'ordre de grandeur du reste.

19.3.5.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$. Si f est de classe C^{n+1} et si $f^{(n+1)}$ bornée alors

$$\forall x \in I, \left\| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in I} \|f^{(n+1)}(t)\|$$

dém. :

On a

$$\left\| \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + (x-a)u) du \right\| \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \|f^{(n+1)}\|_\infty du = \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}$$

□

Remarque Ce résultat constitue une généralisation de l'inégalité des accroissements finis.

19.3.5.3 Formule de Taylor-Young

Théorème

Soit $f : I \rightarrow E$ et $a \in I$. Si f est de classe C^n

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0_E$$

Cette relation est appelée développement limité de f à l'ordre n en a .

dém. :

Puisque f est de classe C^n

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt$$

Puisque $f^{(n)}$ est continue en a , on peut écrire

$$f^{(n)}(t) = f^{(n)}(a) + \varphi(t) \text{ avec } \varphi \xrightarrow{t \rightarrow a} 0$$

et alors

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t) dt$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|t-a| \leq \alpha \Rightarrow \|\varphi(t)\| \leq \varepsilon$$

et alors pour $|x-a| \leq \alpha$,

$$\left\| \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t) dt \right\| \leq \varepsilon \frac{|x-a|^n}{n!}$$

On peut alors écrire

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(t) dt = (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0_E$$

□

Remarque En introduisant le concept de fonction négligeable, on peut aussi écrire

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

Remarque La formule de Taylor-Young est locale : elle ne donne qu'une information sur le comportement asymptotique de f au voisinage de a . La formule de Taylor avec reste intégrale est quant à elle globale, elle fournit une information sur le comportement de la fonction sur l'intervalle I en entier. Il en est de même pour l'inégalité de Taylor-Lagrange.

19.4 Arcs paramétrés

19.4.1 Définition

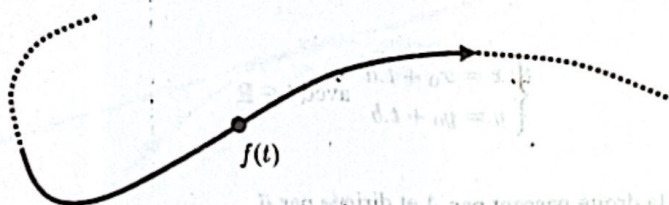
Définition

On appelle arc paramétré de classe C^k (avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) de E tout couple (I, f) constitué d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction vectorielle $f : I \rightarrow E$ de classe C^k .
On s'intéresse alors à l'ensemble de point

$$\Gamma = \{f(t)/t \in I\}$$

appelé support de l'arc (I, f) (et l'on parle aussi de courbe paramétrée).

On dit aussi que la fonction f définit un paramétrage de la courbe Γ .



Remarque La valeur $f(t)$ permet de désigner un point de la courbe Γ , on dit que c'est le point de paramètre t .

Exemple Soit $a \in E$ et $u \neq 0_E$.

L'application $t \mapsto a + t.u$ définit un paramétrage de la droite affine $a + \text{Vect}(u)$.

Exemple Considérons $E = \mathbb{C}$.

La fonction $f : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$ définit un paramétrage de $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.

Remarque Il est fréquent de confondre l'arc paramétré et le support qu'il définit. C'est cependant maladroit car un arc paramétré détermine aussi une dynamique de parcours sur ce support.

19.4.2 Paramétrage dans le plan géométrique.

En munissant le plan géométrique d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$, on peut identifier le plan et $\mathbb{R}^2$.

Un arc paramétré donné par $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ détermine alors à une courbe du plan.

Définition

Soit $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ au moins de classe C^1 .
On appelle arc du plan défini par le système

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ avec } t \in I$$

l'arc paramétré déterminé par l'application

$$f : t \mapsto (x(t), y(t))$$

Exemple Soit $A(x_0, y_0)$ un point et $\vec{u}(a, b)$ un vecteur non nul

$$\begin{cases} x = x_0 + t.a \\ y = y_0 + t.b \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

définit un paramétrage de la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$.

Exemple Soit $\Omega(a, b)$ un point et $R > 0$

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos(t) \\ y = y_0 + R \sin(t) \end{cases} \text{ avec } t \in [0, 2\pi]$$

définit un paramétrage du cercle de centre Ω et de rayon R .

19.4.3 Tangente en un point

Soit (I, f) un arc paramétré de classe au moins C^1 et $t_0 \in I$.
On suppose qu'au voisinage de t_0 ,

$$f(t) = f(t_0) \Rightarrow t = t_0$$

ce qui signifie que la courbe ne se recoupe pas infiniment sur elle-même en t_0 .

Définition

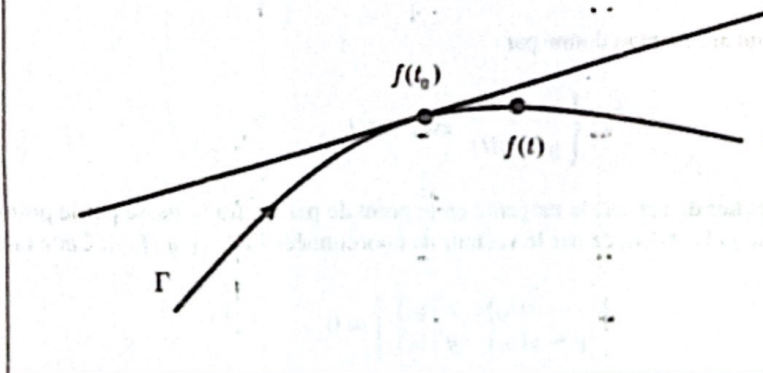
On dit que l'arc (I, f) admet une demi-tangente à droite en t_0 si le vecteur unitaire

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|}$$

admet une limite en t_0 . On dit alors que la droite issue du point $f(t_0)$ dirigée par ce vecteur est la demi-tangente à droite en t_0 .

Mutatis mutandis, on définit la demi-tangente à gauche en t_0 .

Enfin, si les deux droites demi-tangentes sont confondues, on dit que l'arc (I, f) admet une tangente en t_0 qui est cette droite commune.



Remarque Pour qu'il y ait tangente en t_0 , il faut et il suffit que les vecteurs unitaires

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|} \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|}$$

existent et soient égaux ou opposés.

19.4.4 Tangente en un point régulier

Soit (I, f) un arc paramétré de classe au moins C^1 et $t_0 \in I$.

Définition

On dit que le paramètre t_0 est régulier lorsque $f'(t_0) \neq 0_E$.

On dit que l'arc est régulier lorsque tous ses paramètres le sont.

Théorème

Si t_0 est un paramètre régulier alors l'arc admet une tangente en $f(t_0)$ et celle-ci est dirigée par $f'(t_0)$.

dém. :

On peut écrire

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0) \cdot f'(t_0) + (t - t_0) \varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0_E$$

et donc pour $t \neq t_0$

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|} = \frac{t - t_0}{|t - t_0|} \frac{f'(t_0) + \varepsilon(t)}{\|f'(t_0) + \varepsilon(t)\|}$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|} = \frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|} \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|} = -\frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$$

□

Remarque Si $f'(t_0) = 0_E$ et si $f''(t_0) \neq 0_E$, on peut encore montrer l'existence d'une tangente en $f(t_0)$, cette fois-ci dirigée par $f''(t_0)$ car

$$f(t) - f(t_0) = \frac{1}{2} (t - t_0)^2 f''(t_0) + (t - t_0)^2 \varepsilon(t) \text{ avec } \varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0_E$$

Exemple Considérons un arc du plan donné par

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \text{ avec } t \in I$$

Si t est un paramètre régulier de cet arc, la tangente en le point de paramètre t_0 passe par le point de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ et est dirigée par le vecteur de coordonnées $(x'(t_0), y'(t_0))$. Cette tangente a pour équation

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

La droite perpendiculaire à la tangente au point de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ est appelée droite normale à l'arc. Elle a pour équation

$$\begin{pmatrix} x - x(t_0) & x'(t_0) \\ y - y(t_0) & y'(t_0) \end{pmatrix} = 0$$

c'est à dire

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

19.4.5 Vocabulaire cinématique

Soit $f : I \rightarrow E$ au moins de classe C^2 définissant un arc paramétré.

Définition

En cinématique, les vecteurs $\vec{v}(t) = f'(t)$ et $\vec{a}(t) = f''(t)$ sont appelés vecteurs vitesse et accélération à l'instant t .

Remarque Le vecteur vitesse dirige la tangente (lorsqu'il n'est pas nul) et le vecteur accélération oriente la concavité de la courbe. Selon que l'angle géométrique entre $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$ est aigu ou obtus, il y a accélération ou décélération lors du parcours de la courbe. En effet

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\vec{v} | \vec{v}) = 2(\vec{a} | \vec{v})$$