

est dérivable en $a \in I$ si
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe dans E

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E
 $\forall t \in I: f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) e_i$
 f est dérivable sur $I \iff$

$\forall i \leq n: f_i$ est dérivable sur I
 Dans ce cas $f'(t) = \sum_{i=1}^n f'_i(t) e_i$

Exp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \Pi_2(\mathbb{R})$
 $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$
 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
 $f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$

$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$
 A est dérivable sur I
 $\iff \forall i, j \in \{1, \dots, n\}: a_{ij}$ est dérivable sur I et
 $A'(t) = (a'_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$

Soit $L: E \rightarrow F$ une application linéaire
 Si f est dérivable sur I , alors
 $L \circ f: I \rightarrow F$ est dérivable sur I et
 $(L \circ f)'(t) = L(f'(t))$

Dérivation d'une fonction vectorielle
 $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$
 E est de dimension finie

Si $A(t) = P \cdot X(t) \cdot Q$ avec $P \in M_n(\mathbb{R})$, $Q \in M_m(\mathbb{R})$
 Si $X \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ est dérivable et
 $A'(t) = P \cdot X'(t) \cdot Q$

Soit $B: E \times F \rightarrow G$ une app. bilinéaire
 Si $f: I \rightarrow E$ et $g: I \rightarrow F$ sont dérivables sur I

Alors $h: I \rightarrow G$ est dérivable
 $t \mapsto B(f(t), g(t))$
 et $h'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$
 Si $f(t) = A(t) \cdot B(t)$ avec $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$, $B(t) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$
 sont dérivables
 Alors $f'(t) = A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t)$

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien
 $f: I \rightarrow E$ et $g: I \rightarrow E$ sont dérivables, alors
 $h: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$
 est dérivable et
 $h'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$

$\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow I' \subset \mathbb{R}$ et $f: I' \rightarrow E$
 Si f et φ sont dérivables, alors
 $f \circ \varphi: I \rightarrow E$ est dérivable
 et $(f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t))$

Si $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable
 Alors $\varphi \times f$ est dérivable
 $(\varphi \times f)(t) = (\varphi(t), f(t))$

Soit $n \in \mathbb{N}$: f est C^n sur I
 Si f est n fois dérivable sur I
 et $f^{(n)}$ est continue sur I

Soit $L: E \rightarrow F$ linéaire
 Si $f: I \rightarrow E$ est C^n ,
 alors $(L(f))^{(n)} = L(f^{(n)})$

Avec $P \in \Pi_p(\mathbb{K})$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix}$
 Soit u, v sont C^n , alors A est
 C et $A^{(n)}(t) = P \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ \vdots \\ x_p^{(n)} \end{pmatrix}$.

Classe d'une fonction
 vectorielle $f: I \rightarrow E$

Soit $f(t) = \sum_{i=1}^p f_i(t) e_i$
 $\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$: f_i est C^n
 $\Leftrightarrow f$ est C^n sur I

Soit $B: I \rightarrow E \times F$
 est bilinéaire
 $f: I \rightarrow E$ et $g: I \rightarrow F$
 sont C^n , alors
 $B(f, g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k B(f^{(k)}, g^{(n-k)})$

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.
 Soit $f, g: I \rightarrow E$ sont C^n .
 Alors $h(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$ est C^n et
 $h^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$

Déf. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

$\forall f \in [a, b], f(t) = \sum_{k=1}^n f(t) e_k$

$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f(t) dt \right) e_k$

Somme de Riemann

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) = \int_a^b f(x) dx$

Si f est continue sur $[a, b]$, alors $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Intégration d'une fonction vectorielle c.n

$f: [a, b] \rightarrow E$ un c.n de dim $< \infty$

Soit $u, v: I \rightarrow I$ dérivable et $f: I \rightarrow E$ continue. Alors $\int_a^b f(t) dt$ est dérivable sur I et $(f'(x) = f(u(x)) - v(x) f(u(x)))$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Si f est C^{n+1} avec $f^{(n+1)}$ bornée. Alors $\forall x \in I, \forall r \in I$. $\|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)|$

Inégalité des acc. finies

$f \in C^1$ sur I b.g. $\exists \eta > 0$ avec $\forall x \in I, \|f'(x)\| \leq \eta$. Alors $\|f(x) - f(y)\| \leq \eta |x - y|, \forall x, y \in I$

Formule de Taylor avec reste intégral

Si f est de classe C^{n+1} sur I , alors $\forall x \in I, \forall a \in I$. $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

Formule de Taylor-Young

Si f est C^n sur $I, a \in I$. $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(|x-a|^n)$ avec $o(x) = \frac{o(x)}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$