

Dans tout ce chapitre, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E, F et G des K -espaces vectoriels de dimensions finies.

I) Dérivation

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle

Soit $f : I \rightarrow F$ une application et $a \in I$.

Définition 1.

- On dit que f est dérivable en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

C'est à dire $\exists v \in F, \left\| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - v \right\| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

Cette limite s'appelle la dérivée de f en a , on la note $f'(a)$.

- On dit que f est dérivable sur I , si elle est dérivable en tout point de I .

Dans ce cas, on définit l'application dérivée f' de f sur I par $\forall a \in I, f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarque 1.

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe et finie}$$

Proposition 1 (Développement limité à l'ordre 1).

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \exists v \in F, f(a+h) = f(a) + h.v + o(h)$$

c'est à dire f admet un développement limité à l'ordre 1 en a .

Remarque 2 (Interprétation).

- Interprétation géométrique :

Si $f'(a) \neq 0$, alors la courbe représentative de f admet une tangente au point a dirigée par $f'(a)$.

- Interprétation cinématique :

Si f représente une paramétrisation du mouvement d'un point mobile M , alors $f'(a)$ est la vitesse du point M à l'instant a .

Corollaire 1.

$$f \text{ est dérivable en } a \text{ (resp. sur } I) \implies f \text{ est continue en } a \text{ (resp. sur } I)$$

Exemple $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \sqrt{t}$ est continue en 0, pas dérivable en 0.

Définition 2 (Dérivabilité à gauche et à droite).

- On dit que f est dérivable à gauche de a si $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

Cette limite s'appelle la dérivée de f à gauche de a , on la note $f'_g(a)$.

- On dit que f est dérivable à droite de a si $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe.

Cette limite s'appelle la dérivée de f à droite de a , on la note $f'_d(a)$.

Proposition 2.

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche de } a \\ f \text{ est dérivable à droite de } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0, car $f'_g(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$ $\square$

Proposition 3 (Caractérisation à l'aide d'une base).

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F .

On écrit $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)e_k$, alors

f est dérivable en a (resp. sur I) $\iff \forall k \in [1, n], f_k$ est dérivable en a (resp. sur I)

Dans ces conditions, $f'(a) = \sum_{k=1}^n f'_k(a)e_k$

Exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ le sont et $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ $\square$

Application 1 (Fonctions à valeurs complexes).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, alors

f est dérivable en a (resp. sur I) $\iff \operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables en a (resp. sur I)

Dans ces conditions, $f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i\operatorname{Im}(f)'(a)$

Exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ le sont et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = ie^{it}$ $\square$

Application 2 (Fonctions à valeurs matricielles).

Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\forall t \in I, A(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors

A est dérivable en a (resp. sur I) $\iff \forall (i,j) \in [1,n] \times [1,p], a_{i,j}$ est dérivable en a (resp. sur I)

Dans ces conditions, $A'(t) = (a'_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

Exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \pm \sin(t)$ le sont et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} = f(t + \frac{\pi}{2})$ $\square$

2) Propriétés de la dérivée

On note $\mathcal{D}(I, E)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur l'intervalle I à valeurs dans E .

Proposition 4.

► Si $f, g \in \mathcal{D}(I, E)$, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha.f + \beta.g \in \mathcal{D}(I, E)$

$$(\alpha.f + \beta.g)' = \alpha.f' + \beta.g'$$

► Si $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$, et $f \in \mathcal{D}(I, E)$, alors $\varphi.f \in \mathcal{D}(I, E)$

$$(\varphi.f)' = \varphi'.f + \varphi.f'$$

► Si $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ ne s'annule pas et $f \in \mathcal{D}(I, E)$, alors $\frac{f}{\varphi} \in \mathcal{D}(I, E)$

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)' = \frac{\varphi.f' - \varphi'.f}{\varphi^2}$$

Corollaire 2.

$\mathcal{D}(I, E)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \mapsto f'$ est linéaire

Proposition 5 (Linéarité et dérivation).

Si $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $L : E \rightarrow F$ linéaire, alors $L \circ f \in \mathcal{D}(I, F)$ et

$$(L \circ f)' = L \circ f'$$

Proposition 6 (Bilinéarité et dérivation).

Si $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire et $f \in \mathcal{D}(I, E), g \in \mathcal{D}(I, F)$, alors $B(f, g) : I \rightarrow G$ définie par $B(f, g)(x) = B(f(x), g(x))$ est dérivable sur I et

$$(B(f, g))' = B(f', g) + B(f, g')$$

Application 3.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne et $f, g : I \rightarrow E$ dérivables sur I , alors

- $u : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle \end{cases}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, u'(x) = \langle f'(x), g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \rangle$
- $v : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x)\|^2 \end{cases}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, v'(x) = 2 \langle f'(x), f(x) \rangle$

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dérivables sur I , alors $w : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x) - g(x)\|^2 \end{cases}$ est dérivable sur I ou $\|f(x) - g(x)\|$

Corollaire 3.

On suppose que $(E, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie.

Si $f \in \mathcal{D}(I, E)$, et $g \in \mathcal{D}(I, E)$, alors $f \times g \in \mathcal{D}(I, E)$

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

Application 4.

Si $A, B : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dérivables sur I alors $C : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\forall t \in I, C(t) = A(t) \times B(t)$ est dérivable sur I et $\forall t \in I, C'(t) = A'(t) \times B(t) + A(t) \times B'(t)$.

Proposition 7 (Dérivabilité et composition).

Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, et $g \in \mathcal{D}(J, E)$, tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I, E)$ et on a

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x).g'(f(x))$$

Application 5.

Soit $(E, < >)$ un espace euclidien et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne et $f : I \rightarrow E$ dérivable et ne s'annule pas sur I , alors $h : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x)\| \end{cases}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, h'(x) = \frac{\langle f'(x), f(x) \rangle}{\|f(x)\|}$

3) Dérivées successives**Définition 3.**

Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose $f^{(0)} = f$

► On dit que f est k -fois dérivable sur I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I

$$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)} \right)'$$

► On dit que f est de classe C^k sur I , si elle est k -fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est continue sur I .

► On dit que f est de classe C^∞ sur I , si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple Soit $u, v \in E$, l'application $f : t \mapsto u + tv$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = v$ et $\forall k \geq 2, f^{(k)} = 0$ ☐

Exemple $C : t \mapsto \cos(t)$ et $S : t \mapsto \sin(t)$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, C^{(k)}(t) = \cos(t + k\frac{\pi}{2})$ et $S^{(k)}(t) = \sin(t + k\frac{\pi}{2})$ ☐

Exemple $P : x \mapsto x^p$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $P^{(k)}(x) = \begin{cases} \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k} & \text{si } k \leq p \\ 0 & \text{si } k > p \end{cases}$ ☐

Notations :

► On note $\mathcal{D}^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions n -fois dérivable sur I .

► On note $\mathcal{C}^n(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I .

► On note $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I .

Proposition 8 (Caractérisation à l'aide d'une base).

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de F .

On écrit $\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)e_k$, alors $f \in \mathcal{D}^n(I, E) \iff \forall k \in [1, n], f_k \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$.

Dans ce cas :

$$\forall j \in [1, n], \forall x \in I, f^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^n f_k^{(j)}(x)e_k$$

on peut remplacer $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ le sont et $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(t) = (\cos(t + k\frac{\pi}{2}), \sin(t + k\frac{\pi}{2}))$. ☐

Application 6 (Fonctions à valeurs complexes).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, alors $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{C}) \iff \operatorname{Re}(f) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ et $\operatorname{Im}(f) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$.

Dans ce cas :

$$\forall j \in [1, n], \forall x \in I, f^{(j)}(x) = \operatorname{Re}(f)^{(j)}(x) + i\operatorname{Im}(f)^{(j)}(x)$$

on peut remplacer $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Application 7 (Fonctions à valeurs matricielles).

Soit $A : I \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $\forall t \in I, A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors

$$A \in \mathcal{D}^n(I, E) \iff \forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p] \ a_{ij} \in \mathcal{D}^n(I, E)$$

Dans ce cas :

$$\forall k \in [1, n], \forall t \in I, A^{(k)}(t) = (a_{ij}^{(k)}(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

on peut remplacer $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \pm \sin(t)$ le sont et $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, f^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t + k\frac{\pi}{2}) & -\sin(t + k\frac{\pi}{2}) \\ \sin(t + k\frac{\pi}{2}) & \cos(t + k\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = f(t + k\frac{\pi}{2}) \otimes$

Proposition 9.

► Si $f, g \in \mathcal{D}^n(I, E)$, alors $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha f + \beta g \in \mathcal{D}^n(I, E)$.

Dans ce cas :

$$\forall k \in [1, n], (\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$$

► Si $\varphi \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$, et $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$, alors $\varphi \cdot f \in \mathcal{D}^n(I, E)$.

► Si $\varphi \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ ne s'annule pas et $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$, alors $\frac{f}{\varphi} \in \mathcal{D}^n(I, E)$

on peut remplacer $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 10 (Linéarité et dérivation).

Si $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et $L : E \rightarrow F$ linéaire, alors $L \circ f \in \mathcal{D}^n(I, F)$ et $\forall k \in [1, n], (L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$.

on peut remplacer $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 11 (Bilinéarité et dérivation).

Si $B : E \times F \rightarrow G$ bilinéaire et $f \in \mathcal{D}^n(I, E), g \in \mathcal{D}^n(I, F)$, alors $B(f, g) : I \rightarrow G$ définie par $B(f, g)(x) = B(f(x), g(x))$ est n fois dérivable sur I et

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}, g^{(n-k)})$$

on peut remplacer $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Application 8.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne et $f, g : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , alors

► $u : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

► $v : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x)\|^2 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

Corollaire 4.

On suppose que $(E, +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre de dimension finie.

Si $f \in \mathcal{D}^n(I, E)$, et $g \in \mathcal{D}^n(I, E)$, alors $f \times g \in \mathcal{D}^n(I, E)$ et $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$.

on peut remplacer $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 12 (Composition).

Si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, et $g \in \mathcal{D}^n(J, E)$, tel que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I, E)$.

on peut remplacer $\mathcal{D}^n$ par $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Application 9.

Soit $(E, < >)$ un espace euclidien et $x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne et $f : I \rightarrow E$ de classe C^n et ne s'annule pas sur I , alors $h : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|f(x)\| \end{cases}$ est de classe C^n sur I .

II) Intégration sur un segment**1) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment****Définition 4 (Continuité par morceaux).**

Une fonction $f : [a, b] \rightarrow E$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq p}$ une subdivision de $[a, b]$ telle que f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ pour tout $k = 0, 1, \dots, p-1$ et admet des limites finies à gauche et à droite de x_k pour tout $k = 0, 1, \dots, p$.

Exemples

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Toute fonction en escalier sur un segment $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Proposition 13.

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$.

Pour tout $t \in [a, b]$, on écrit $f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)e_k$, alors

f est continue par morceaux sur $[a, b] \iff \forall k \in [1, n], f_k$ est continue par morceaux sur $[a, b]$

Définition 5 (définition de l'intégrale).

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux sur $[a, b]$.

Pour tout $t \in [a, b]$, on écrit $f(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)e_k$.

On définit l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ par : $\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b f_k(t)dt \right) e_k \in E$.

Remarque 3.

L'intégrale définie ci-dessus ne dépend pas de la base choisie.

Exemples

$f : [0, \pi] \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ est continue sur $[0, \pi]$, car $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \pm \sin(t)$ le sont.

La valeur de l'intégrale est :

$$\int_0^\pi f(t)dt = \begin{pmatrix} \int_0^\pi \cos(t)dt & -\int_0^\pi \sin(t)dt \\ \int_0^\pi \sin(t)dt & \int_0^\pi \cos(t)dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 14 (propriétés de l'intégrale).

Soit $f, g : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

► Linéarité : $\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$.

► Relation de Chasles : Pour tout $c \in [a, b]$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$.

2) Sommes de Riemann

Proposition 15 (Sommes de Riemann).

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

On a aussi $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

Remarque 4 (Un cas particulier important).

Soit $f : [0, 1] \rightarrow E$ continue par morceaux sur $[0, 1]$. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$.

Application 10 (Suite Harmonique).

Pour tout $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, alors $H_{2n} - H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

Preuve :

Pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

En faisant, un changement d'indice, on obtient $H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k}{n} + 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $f(t) = \frac{1}{1+t}$.

Comme f est continue sur $[0, 1]$, par les sommes de Riemann, on obtient

$$H_{2n} - H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln(2)$$

Application 11 (Inégalité de Jensen continue).

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}$.

Alors

Proposition 16 (Composition avec une application linéaire).

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux sur $[a, b]$ et $L : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Alors

Proposition 17 (Inégalité triangulaire).

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ continue par morceaux sur $[a, b]$.

Alors

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

3) Intégration et dérivation

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 6 (primitive).

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction continue sur I et $F : I \rightarrow E$.

On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple $t \mapsto \ln(t)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$.

Proposition 18.

Si F et G sont deux primitives de f sur I , alors $F - G$ est constante sur I .

Théorème 1.

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction continue sur I et $a \in I$.

Alors $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur I et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

F est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Corollaire 5.

Toute fonction continue sur un intervalle, admet au moins une primitive.

Application 12.

Soient $u, v : J \rightarrow I$ dérivables et $f : I \rightarrow E$ continue.

Alors $x \mapsto G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $\forall x \in J, G'(x) = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$.

Théorème 2 (Théorème fondamental du calcul intégral).

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I .

Pour tout $a, b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Corollaire 6.

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction de classe C^1 sur I , alors pour tout $a, b \in I, \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Application 13.

Soit $g : I \rightarrow E$ de classe C^1 sur I où $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien.

Pour tout $a, b \in I, \int_a^b \langle g'(t), g(t) \rangle dt = \frac{\|g(b)\|^2 - \|g(a)\|^2}{2}$.

Théorème 3 (Inégalité des accroissements finis).

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction de classe C^1 sur I de dérivée bornée sur I .

Alors pour tout $a, b \in I, \|f(b) - f(a)\| \leq M|b - a|$ où $M = \sup_{t \in I} \|f'(t)\|$.

Corollaire 7.

Toute fonction de classe C^1 sur un segment est lipschitzienne.

Remarque 5.

Le théorème des accroissements finis tombe en défaut si l'espace d'arrivée $E \neq \mathbb{R}$.

Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$.

f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$, cependant pour tout $c \in]0, 2\pi[, f(2\pi) - f(0) = 0 \neq 2i\pi e^{ic} = (2\pi - 0)f'(c)$.

4) Formules de Taylor

Théorème 4 (Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n).

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction de classe C^{n+1} sur I .

Alors pour tout $a, b \in I$ tel que $a < b$, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Remarque 6.

La formule de Taylor avec reste intégral est une généralisation du théorème fondamental du calcul intégral, et s'obtient par récurrence en effectuant des intégrations par parties.

Proposition 19 (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction de classe C^{n+1} sur I et $f^{(n+1)}$ est bornée.

Alors pour tout $a, b \in I$ tel que $a < b$, on a

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M = \sup_{t \in I} \|f^{(n+1)}(t)\|$

Remarque 7.

La formule de Taylor-Lagrange tombe en défaut si l'espace d'arrivée $E \neq \mathbb{R}$.

Théorème 5 (Formule de Taylor-Lagrange si $E = \mathbb{R}$).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a, b \in I$ tel que $a < b$.

On suppose de f est n fois dérivable sur $[a, b]$ et $(n+1)$ fois dérivable sur $]a, b[$:

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Théorème 6 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n).

Soit $f : I \rightarrow E$ une fonction n fois dérivable sur I .

Alors pour tout $a, x \in I$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$

On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a .

Exemple Déterminer un développement limité de $f : x \mapsto (e^x, \cos(x))$ à l'ordre 2 en 0

Solution

On a f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, car ses composantes le sont, alors elle admet un développement limité en 0 à tout ordre.

En particulier

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = (1, 1) + x(1, 0) + x^2 \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) + o(x^2)$$

où $o(x^2) = (o(x^2), o(x^2))$.

III) Arcs paramétrés

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Définition 7 (Arc paramétré).

- ▶ On appelle arc paramétré sur E , toute application $\gamma : I \rightarrow E$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- ▶ On appelle support de l'arc γ , noté $\text{supp}(\gamma)$ l'ensemble $\{\gamma(t), t \in I\}$.
- ▶ γ s'appelle un paramétrage de $\text{supp}(\gamma)$.
- ▶ On dit que l'arc γ est plan, si $\dim(E) = 2$.

- ▶ On dit que l'arc paramétré est de classe C^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sur I , si γ est de classe C^k sur I .

Exemples

- ▶ Soit $\gamma : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (a + tu, b + tv) \end{cases}$ est un arc paramétré de classe C^∞ , de support la droite affine dirigé par le vecteur (u, v) et passe par le point (a, b) .
- ▶ Soit $\gamma : \begin{cases} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (a + R \cos(t), b + R \sin(t)) \end{cases}$ est un arc paramétré de classe C^∞ , de support le cercle de centre (a, b) et de rayon R .

Remarque 8.

Un support S peut avoir plusieurs paramétrages comme le montre l'exemple suivant :

$$\gamma_1 : \begin{cases} [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \gamma_2 : \begin{cases} [0, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{cases} \quad \text{sont deux paramétrages du cercle unité.}$$

Définition 8 (Multiplicité d'un point).

Soit $\gamma : I \rightarrow E$ un arc paramétré et $M_0 = \gamma(t_0)$ avec $t_0 \in I$.

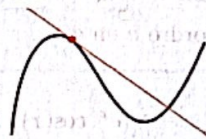
- ▶ On dit que le point M_0 est simple si $\text{card}\{t \in I, \gamma(t) = M_0\} = 1$.
- ▶ On dit que le point M_0 est double si $\text{card}\{t \in I, \gamma(t) = M_0\} = 2$.
- ▶ On dit que le point M_0 est multiple si $\text{card}\{t \in I, \gamma(t) = M_0\} \geq 2$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $\text{card}\{t \in I, \gamma(t) = M_0\} = k$ signifie que le support passe k fois par le point M_0 .

Définition 9 (Point régulier, tangente en un point régulier).

Soit $\gamma : I \rightarrow E$ un arc paramétré de classe C^1 et $M_0 = \gamma(t_0)$ avec $t_0 \in I$.

- ▶ On dit que le point M_0 est régulier si $\gamma'(t_0) \neq 0$.
- Dans ce cas, la droite qui passe par M_0 et dirigé par la vecteur $\gamma'(t_0)$ s'appelle la tangente à γ en M_0 .



- ▶ On dit que l'arc est régulier, si tous ses points sont réguliers : $\forall t \in I, \gamma'(t) \neq 0$.

Définition 10 (Normale à un arc plan en un point régulier).

Soit $\gamma : I \rightarrow E$ un arc paramétré plan de classe C^1 et $M_0 = \gamma(t_0)$ un point régulier avec $t_0 \in I$.

On appelle normale à γ en M_0 la perpendiculaire de la tangente en M_0 .

Théorème 7.

Soit $\gamma : \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{cases}$ un arc paramétré plan de classe $\mathcal{C}^1$ et $M_0 = (x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ un point régulier avec $t_0 \in I$ et $M(x, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

► Soit (T) la tangente à γ en M_0 et , alors

$$M \in T \iff \gamma_2'(t_0)(x - x_0) - \gamma_1'(t_0)(y - y_0) = 0 \quad \text{Équation de la tangente}$$

► Soit (N) la normale à γ en M_0 et , alors

$$M \in N \iff \gamma_1'(t_0)(x - x_0) + \gamma_2'(t_0)(y - y_0) = 0 \quad \text{Équation de la normale}$$

Exercice 1

Soit $(\mathcal{E})$ une ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $a, b > 0$.

① Déterminer un paramétrage $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de $(\mathcal{E})$.

② Déterminer l'équation de la tangente et la normale en tout point $M(x_0, y_0)$ de $(\mathcal{E})$.