

Partie II

$$1) \cos A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n A^n \quad \text{avec} \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

$$a_{2n+1} = 0$$

D'après [3], $\exists!$

$\exists! Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \cos A = Q(A)$

De m $\exists! R \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } \sin A = R(A)$ avec

$\deg R < \deg Q < d$.

$$\begin{aligned} * \quad \sin A \cos A &= P(A)Q(A) = (P \times Q)(A) \\ &= (Q \times P)(A) = Q(A)P(A) \\ &= \cos A \sin A. \end{aligned}$$

$$2) \text{ soit } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} A^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

$$\text{avec } f_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} A^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$; f_n est C^1 sur $\mathbb{R}$ ($\frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!}$ matrice constante)

$$\begin{cases} f'_n(x) = \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{(2n)!} A^{2n} = \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} A^{2n}, & n \geq 1 \\ f'_0(x) = 0 \end{cases}$$

soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\alpha = \sup(|a|, |b|)$

$$\sup_{[a, b]} \|f'_n(x)\| \leq \frac{\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!} \|A\|^{2n} \quad \text{avec}$$

soit $\gamma_n = \frac{2^{n-1}}{(2n-1)!} \|A\|^{2n}$.

si $\|A\| \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \right| = \frac{2}{(2n+1)(2n)} \|A\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1$
 D'après le critère de convergence $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \gamma_n < \infty$ (et aussi si $\|A\| = 0$)

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \sup_{t \in [a,b]} \|f'_n(t)\| < \infty \Rightarrow \sum_{n \geq 1} f'_n \in C^0 \Rightarrow C^1$

D'après le th. de dérivation, f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} A^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

$$= - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1}$$

$$= -A \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n}$$

$$f'(x) = -A \sin(xA), \forall x \in \mathbb{R}$$

car la fonction $\pi \mapsto A\pi$ est linéaire continue $\Rightarrow$ continue.

soit $\varphi(x) = \cos^2(xA) + \sin^2(xA), x \in \mathbb{R}$
 $= \cos(xA) \cos(xA) + \sin(xA) \sin(xA)$

ma $x \mapsto \cos(xA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin(xA)$ " " "

et l'app. $(\pi, \nu) \mapsto \pi \times \nu$ est bilinéaire en $\dim < \infty$

D'où φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (\cos(xA))' \cos(xA) + (\cos(xA)) \cos(xA)' \\ &\quad + (\sin(xA))' \sin(xA) + \sin(xA) \sin(xA)' \\ &= -A \sin(xA) \cos(xA) + \cos(xA) (-A \sin(xA)) \\ &\quad + A \cos(xA) \sin(xA) + \sin(xA) A \cos(xA) \end{aligned}$$

D'après $\sin(xA)$ et $\cos(xA)$ commutent

$$A \sin(xA) = A R(A) = R(A) A = \sin(xA) A$$

$$A \cos(xA) = \cos(xA) A$$

On déduit que $\varphi'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

donc $\varphi'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$; alors $\varphi(x) = c$

$$\varphi(x) = \varphi(0) = I_n, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\cos^2(xA) + \sin^2(xA) = I_n, \forall x \in \mathbb{R}$$

Partie

$$1) D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: D^n = \text{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_p^n)$$

$$\Rightarrow e^D = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!} = \text{diag}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda_1^n}{n!}, \dots, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda_p^n}{n!}\right)$$

$$e^D = (e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p})$$

$$2) A = P^{-1}BP \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: A^n = P^{-1}B^nP^{-1}$$

En utilisant la continuité de l'app. linéaire

$\Pi \mapsto P^{-1}\Pi P$ on déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = P \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!} \cdot P^{-1} \Leftrightarrow$$

$$e^{A^0} = P e^B P^{-1}$$

$$3) \text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \quad A \in \text{Sp}(\mathbb{R})$$

D'après le th. spectral $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tel :

$$A = P D P \quad \text{avec } D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

$$\Rightarrow \|A\|_F = \|D\|_F = \text{tr}(D^0) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^0$$

(d'après I)

on déduit que $\forall k \in 1, \dots, p$: $|\lambda_k|^2 \leq \|A\|^2$

$$\Rightarrow |\lambda_k| \leq \|A\|$$

b) on a: $e^A = {}^t P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}) P$

$$\Rightarrow \operatorname{Sp}(e^A) = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}\} \subset \mathbb{R}_+^*$$

De plus $e^A \in \operatorname{Sp}_p(\mathbb{R})$

$$\operatorname{Sp}(e^A) \in \operatorname{Sp}_p^{++}(\mathbb{R})$$

De plus si $\operatorname{mult}(\lambda_k) = m_k \Rightarrow$

$$A = {}^t P \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_p I_{m_p}) P$$

$$\Rightarrow e^A = {}^t P \operatorname{diag}(e^{\lambda_1} I_{m_1}, \dots, e^{\lambda_p} I_{m_p}) P$$

si $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow e^{\lambda_i} \neq e^{\lambda_j}$

$$\Leftrightarrow \operatorname{mult}(e^{\lambda_k}) = m_k$$

c) $Av = \lambda v \Rightarrow$ par récurrence $A^k v = \lambda^k v$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A^n v)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} v$$

par continuité

$$\text{de } \pi \mapsto \pi \cdot v \quad \left\| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \right) v = e^A v \right.$$

$$\Leftrightarrow e^A \cdot v = e^{\lambda} v$$

d) on a $A = {}^t P \operatorname{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_p I_{m_p}) P^{-1}$

$$\text{Soit } V \in \ker(A - \lambda_k I_n) \Rightarrow V \in \ker(e^A - e^{\lambda_k I_n})$$

$$\Rightarrow \ker(A - \lambda_k I_n) \subset \ker(e^A - e^{\lambda_k I_n})$$

$$\begin{aligned} \text{De plus } \dim \ker(A - \lambda_k I_n) &= n - \text{rg}(A - \lambda_k I_n) \\ &= n - \text{rg}(D - \lambda_k I_n) = n - \text{rg} \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r - \lambda_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n - \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n m_i \right) \quad (m_i = \text{mul}(\lambda_i) = \text{mul}(e^{\lambda_i}))$$

$$\Rightarrow n - \text{rg} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 I_{m_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_r I_{m_r}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow n - \text{rg}(e^D - e^{\lambda_k I_n}) &= n - \text{rg}(e^A - e^{\lambda_k I_n}) \\ \Rightarrow \dim \ker(A - \lambda_k I_n) &= \dim \ker(e^A - e^{\lambda_k I_n}) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\ker(A - \lambda_k I_n) = \ker(e^A - e^{\lambda_k I_n})$$

Partie V

$$1) \text{ Soit } \Pi \in S_p^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{Sp}(\Pi) \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$\text{On pose } \text{Sp}(\Pi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$$

Puisque $p_k > 0$, on pose $\lambda_k = \ln(p_k)$

D'autre part $\Leftrightarrow p_k = e^{\lambda_k}$

$$\Rightarrow \Pi = {}^t P \begin{pmatrix} p_1 & & \\ & \ddots & \\ & & p_r \end{pmatrix} P$$

$$\Pi = {}^t P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_r} \end{pmatrix} P$$

Deduire que $\exp: \mathcal{S}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$
est surjectif.

$$\text{on a } \Pi = {}^t P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_r} \end{pmatrix} P$$
$$= \exp \left({}^t P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} P \right)$$
$$= \exp(A)$$

$$\text{avec } A = {}^t P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) P$$

$\Rightarrow \exp$ est surjectif.

b) Soit $A, B \in \mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ tq $\exp(A) = \exp(B)$

i) soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda v_p \in A$.

$$\{0\} \neq \ker(A - \lambda I_p) = \ker(e^A - e^\lambda I_p)$$

$$\lambda v_p \in B \quad \Rightarrow \quad = \ker(e^B - e^\lambda I_p) \neq \{0\}$$

$$\Rightarrow \ker(B - \lambda I_p)$$

Car $\lambda v_p \in B \Leftrightarrow e^\lambda v_p \in e^B$

ii) On a $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \ker(A - \lambda I_p) = \ker(B - \lambda I_p)$

$\lambda \text{ VP de } A \Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_p) \neq \{0_{\mathbb{R}^p}\}$

$\Leftrightarrow \ker(B - \lambda I_p) \neq \{0_{\mathbb{R}^p}\}$

$\Leftrightarrow \lambda \text{ VP de } B$

De plus A est diagonalisable $\Rightarrow \exists B'$

une base formée de $\vec{v}_p$ de A qui sont des $\vec{v}_p$ de B (car $E_\lambda(A) = E_\lambda(B)$)

$\Rightarrow A = B$

cl L'app: $\exp$ est bijective.

2) $\text{Log} = (\exp)^{-1}: S_p^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow S_p(\mathbb{R})$

a) Soit $A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$

D'après le th. spectrale, il existe $P \in O_p(\mathbb{R})$

t.q. $A = {}^t P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P$; $\lambda_i > 0$

d'après $\exp(A) = {}^t P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}) P$

Soit $g: S_p^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow S_p(\mathbb{R})$

$A = {}^t P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P \rightarrow {}^t P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P$

$g \circ \exp(A) = g({}^t P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}) P)$

$= {}^t P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P = A$

$$\Rightarrow (\text{res}_p(A))^{-1} = g(A) \Rightarrow L_n(A) = \sum_p \deg(L_n(d_i) - L_n(e_i))$$

b) on a $A = {}^t P \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_p) P$ avec $d_i > 0$

$\Rightarrow A$ est inversible et $A^{-1} = E_p \text{ diag} \left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_p} \right) E$.

$$\Rightarrow \text{Sp}(A^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_p} \right\} \subset \mathbb{R}_+^*$$

or $A^{-1} \in Sp(1, \mathbb{R})$, d'où $A^{-1} \in Sp^{++}(1, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \text{Log}(A^{-1}) = \sum p \log\left(\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_p}\right) p$$

$$= -\frac{1}{2} P \operatorname{diag}(m_1, \dots, m_n) P$$

$$\boxed{\log(A^{-1}) = -\log A}$$

3) $A \in S_p^{++}(\mathbb{R}) : S_p(A) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$

$$B \in S_p^{++}(\mathbb{R}) ; S_p(B) = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}.$$

On pose, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ la Mat. $(f, B_C) = A$.

$$g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^p) \text{ by } \text{Mat}(f, B_c) = B$$

$$AB = BA \iff f \circ g = g \circ f$$

On a A est diagonalisable, donc une B.O.V.

⇒ f 4/

$$\Pi_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} E_{\lambda_i}(f)$$

Puisque $g \circ f = f \circ g \Rightarrow E_{\lambda_i}(f)$ est stable.
 par g . on pose $g_i: E_{\lambda_i}(f) \rightarrow E_{\lambda_i}(f)$ l'endomorphisme induit
 or g est diagonalisable $\Rightarrow g_i$ est diagonalisable
 de plus g est un endo symétrique $\Rightarrow$

g_i " " " "

Alors g_i est diagonalisable dans une BON.
 Biforme de $\mathbb{R}^p$ de g_i $\Rightarrow \mathbb{R}^p$ de g
 soit $B = (B_1, \dots, B_p) = \text{BON}$ form. de $\mathbb{R}^p$ de g
 or B_i BON de $E_{\lambda_i}(f) \Rightarrow B = \text{BON}$ form. de $\mathbb{R}^p$ de f

$$\Rightarrow \text{Mat}(f, B_c) = P_{B_c \rightarrow B} \text{Mat}(f, B) P_{B \rightarrow B_c}$$

$$A = P \cdot \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) P^{-1}$$

$$\text{et } \text{Mat}(f, B_c) = P_{B_c \rightarrow B} \text{Mat}(f, B) P_{B \rightarrow B_c}$$

$$B = P \cdot \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_p) P^{-1}$$

b) On déduit que $AB = P \cdot \text{diag}(\alpha_1 \beta_1, \dots, \alpha_p \beta_p) P^{-1}$

$$\Rightarrow \text{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}_+^* \text{ et on a } AB \in \text{Sp}(\mathbb{R})$$

$$\text{Ainsi } \underline{AB \in \text{Sp}^{++}(\mathbb{R})}$$

$$\begin{aligned} \text{Log}(AB) &= {}^t P \text{diag}(\text{Ln}(\alpha_1 \beta_1), \dots, \text{Ln}(\alpha_p \beta_p)) \\ &= {}^t P \left(\text{diag}(\text{Ln}(\alpha_1), \dots, \text{Ln}(\alpha_p)) + \right. \\ &\quad \left. \text{diag}(\text{Ln}(\beta_1), \dots, \text{Ln}(\beta_p)) \right) P \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Log} \dots = \text{Log}(A) + \text{Log} B$$

Soit $A \in \text{Sp}(\mathbb{R})$; on pose $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$
D'après Th 3; $\forall k \in \{1, \dots, p\}$; $|\lambda_k| \leq \|A\| \leq 1$

$$\Rightarrow \underline{|\lambda_k| \leq 1}$$

$$\text{Sp}(I_p - A) = \{1 - \lambda_k; 1 \leq k \leq p\}$$

$$\text{or } -1 < \lambda_k \leq 1 \Rightarrow 1 - \lambda_k > 0$$

$$\Rightarrow \text{Sp}(I_p - A) \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \underline{I_p - A \in \text{Sp}^{++}(\mathbb{R})}$$

de plus $I_p - A \in \text{Sp}(\mathbb{R})$

$$b) \quad I_p - A = {}^t P \text{diag}(1 - \lambda_1, \dots, 1 - \lambda_p) P$$

$$\text{Log}(I_p - A) = {}^t P \text{diag}(\text{Ln}(1 - \lambda_1), \dots, \text{Ln}(1 - \lambda_p)) P$$

$$\text{unique } -1 < \lambda_k \leq 1, \text{ alors } \text{Ln}(1 - \lambda_k) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^n}{n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log(I_p - A) &= \frac{1}{-1} P \cdot \text{diag} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_1^n}{n}, \dots, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_p^n}{n} \right) P \\ &= \frac{1}{-1} P \lim_{N \rightarrow +\infty} \text{diag} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\lambda_1^n}{n}, \dots, \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_p^n}{n} \right) P \end{aligned}$$

Comme l'app $\pi \mapsto {}^t P \pi P$ est linéaire en dim $< \infty \Rightarrow$ continue, alors

$$\begin{aligned} \log(I_p - A) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{-1} P \cdot \text{diag} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\lambda_1^n}{n}, \dots, \sum_{n=1}^N \frac{\lambda_p^n}{n} \right) P \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{A^n}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\log(I_p - A) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{n} \text{ pour } \|A\| < 1}$$

$$\subseteq) \log(I_p - A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n A^n$$

Alors d'après T.3 : $\exists ! R \in \mathbb{R}[X]$ et

$\deg R \leq d$ et

$$\Rightarrow \log(I_p - A) \in \mathbb{R}[A]$$

$$= \dots = \dots$$