
Problème : Réduction et fonctions vectorielles

Dans ce problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A et $\text{tr}(A)$ la trace de A . On définit également l'exponentielle de A par :

$$e^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

On désigne par $S_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et par

$$S_p^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in S_p(\mathbb{R}) \mid \text{sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*\}.$$

Enfin, on note $O_p(\mathbb{R}) = \{P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}); {}^t P P = I_p\}$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on définit $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^t A)}$.

- (1) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
 - (a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
 - (b) Soit P une matrice orthogonale (${}^t P P = I_p$). Montrer que

$$\|PA\| = \|AP\| = \|A\|$$

- (c) Montrer que, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

- (d) Dédurre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$

Dans la suite, on munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ définie précédemment.

Pour A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note Π_A le *polynôme minimal* de A de degré $d \in \mathbb{N}^*$. En outre, on désigne par $\mathbb{R}[A] = \{Q(A); Q \in \mathbb{R}[X]\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ formé par les matrices qui s'écrivent sous la forme d'un polynôme en A .

- (2) (a) Montrer que la famille $\{I_p, A, \dots, A^{d-1}\}$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.
 (b) En déduire que, pour toute matrice M de $\mathbb{R}[A]$, il existe un unique polynôme R de degré strictement inférieur à d tel que $M = R(A)$.
 (c) Justifier que $\mathbb{R}[A]$ est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
- (3) Dans cette question, on se donne (a_n) une suite réelle, on considère la série de fonctions à coefficients réels $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $r \in]0, +\infty[\cup \{\infty\}$ tel que la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est absolument convergente sur $] -r, r[$.
 On suppose de plus que $\|A\| < r$.
 (a) Montrer que la série matricielle $\sum_{n \geq 0} a_n A^n$ converge.
 (b) Montrer qu'il existe un unique polynôme R de degré strictement inférieur à d tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n = R(A).$$

Partie II : Une identité trigonométrique matricielle

On fixe une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, et on note Π_A le polynôme minimal de A de degré $d \in \mathbb{N}^*$. On définit les matrices carrées de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivantes :

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de deux polynômes Q et R de degré strictement inférieur à d tels que $\cos(A) = Q(A)$ et $\sin(A) = R(A)$. En déduire que les matrices $\sin(A)$ et $\cos(A)$ commutent.
2. On note $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $\varphi(t) = \cos^2(tA) + \sin^2(tA)$.
 - (a) Montrer que la fonction vectorielle $f : t \rightarrow \cos(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que

$$f'(t) = -A \sin(tA).$$

On admettra de même que la fonction $t \rightarrow \sin(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée vérifie :

$$(\sin(tA))' = A \cos(tA) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Montrer soigneusement que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est nulle.
- (c) En déduire que $\cos^2(tA) + \sin^2(tA) = I_n$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie III

1. On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des nombres réels. Calculer e^D .
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = P^{-1}BP$, où P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer que soigneusement que $e^A = P^{-1}e^B P$.

On admet dans la suite le théorème suivant :

Théorème spectral : Soit A une matrice symétrique réelle, alors ses valeurs propres sont réelle et il existe P une matrice orthogonale réelle tel que

$$A = {}^t P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P$$

3. Soit A une matrice de $S_p(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A .

Montrer, à l'aide du théorème spectral, que $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$ et en déduire que, pour tout $1 \leq k \leq p$, $|\lambda_k| \leq \|A\|$.

On note $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de A d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, \dots, m_r$.

- a) Montrer que $e^A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ et que $\text{Sp}(e^A) = \{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_p}\}$. Comparer les ordres de multiplicité de λ_i et de e^{λ_i} .
- b) Soit $V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $AV = \lambda V$. Montrer soigneusement que $e^A V = e^\lambda V$.
- c) Montrer que pour tout réel λ vp de A , $\ker(A - \lambda I_p) = \ker(e^A - e^\lambda I_p)$.

Partie IV : Logarithme d'une matrice symétrique définie positive

1. On se propose de prouver que l'application

$$\exp : S_p(\mathbb{R}) \rightarrow S_p^{++}(\mathbb{R}) \quad ; \quad A \mapsto e^A$$

est bijective.

- (a) Montrer que $\exp$ est surjective.
- (b) Soient A et B deux matrices de $S_p(\mathbb{R})$ telles que $e^A = e^B$.

- (a) Montrer que, pour tout réel λ , $\ker(A - \lambda I_p) = \ker(B - \lambda I_p)$.
- (b) En déduire que $A = B$. Conclure.

La fonction réciproque de $\exp$ sera notée

$$\log : S_p^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow S_p(\mathbb{R}) \quad ; \quad A \mapsto \log(A).$$

2. Soit A une matrice de $S_p^{++}(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de A .

- (a) Démontrer qu'il existe $P \in O_p(\mathbb{R})$ telle que

$$A = {}^t P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) P \quad \text{et} \quad \log(A) = {}^t P \operatorname{diag}(\ln(\lambda_1), \dots, \ln(\lambda_p)) P$$

- (b) En déduire que $A^{-1} \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ et que $\log(A^{-1}) = -\log(A)$.

3. Soient A et B deux matrices de $S_p^{++}(\mathbb{R})$ qui commutent.

- (a) Démontrer qu'il existe $P \in O_p(\mathbb{R})$ et des réels strictement positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et $\beta_1, \dots, \beta_p$ tels que

$$A = {}^t P \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_p) P \quad \text{et} \quad B = {}^t P \operatorname{diag}(\beta_1, \dots, \beta_p) P$$

- (b) En déduire que $AB \in S_p^{++}(\mathbb{R})$ et que $\log(AB) = \log(A) + \log(B)$.

4. Soit A une matrice de $S_p(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$. On note d le degré du polynôme minimal de A .

- (a) Montrer que $I_p - A \in S_p^{++}(\mathbb{R})$.
- (b) Montrer rigoureusement que

$$\log(I_p - A) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n}.$$

- (c) En déduire qu'il existe un unique polynôme R de degré strictement inférieur à d tel que $\log(I_p - A) = R(A)$.