

$B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ bases E
 $\forall x \in [a, b]; f(x) = \sum_{k=1}^n p(x) e_k$ def.
 $\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b p(x) dx \right) e_k$

Somme de Riemann
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) = \int_a^b f(x) dx$
 (ou $\sum_{k=1}^n$)

$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx$

Intégration d'une fonction.
 vectorelle C.T.
 $f: [a, b] \rightarrow E$
 dim $E < \infty$

Inégalité de Taylor-Lagrange
 si f est C^{n+1} et $\forall t \in [a, b]$
 $\Rightarrow \|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}(\xi)\|$

APP Soit $A(t) = (a_{ij}(t))$
 $\int_a^b A(t) dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t) dt \right)$
 Soit $\varphi: C^1([a, b]) \rightarrow K$
 $A \in M_p(K)$
 $\int_a^b (\varphi(t) \cdot A) dt = \left(\int_a^b \varphi(t) dt \right) \cdot A$

Formule de Taylor avec reste intégral

si f est C^{n+1} sur $[a, b]$
 $f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

$$f(t) = e^{it}$$

$$f(0) = f(2\pi)$$

$$\forall c \text{ by } f'(c) = 0$$

$$\text{or}$$

$$= 0$$

→ Formule de Taylor-Young.

Si f est de classe C^n en a , [a. 5].

$$\text{alors } f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((b-a)^n)$$

→ Si $u, v: I \rightarrow J$ et $f: J \rightarrow E$.
 u et v sont dérivables en I et f continue sur J .
Alors

$F: x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable en I

$$\text{et } F'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$$

Proble...

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

Partie 5.

1) d/ $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

Soit $AB = (c_{ij})$

avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j} c_{ij}^2$$

or $c_{ij}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right)$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} c_{ij}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_{kj}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \|AB\|^2 \leq \|A\|^2 \|B\|^2$$

1) $R[\Lambda] = \{ \Phi(A); \Phi \in \mathbb{R}[X] \}$

2) Soit $\pi \in R[\Lambda]; \Rightarrow \exists \Phi \in \mathbb{R}[X]$

et $\pi = \Phi(A)$

$\Phi = \pi_A \cdot H + R$ avec $\deg R \leq d-1$

$\Rightarrow \Phi(A) = \pi_A(A) \cdot H(A) + R(A)$

$\Rightarrow \pi = \Phi(A) = R(A) = \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k \cdot A^k$

$\Rightarrow R[\Lambda] = \text{vect} (I_p, A, \dots, A^{d-1})$

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{R}$ et $\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k A^k = 0_p$

$\Rightarrow \exists P \in \mathbb{R}[X]$ et $P(A) = 0_p$

Soit $P \neq 0 \Rightarrow \deg P \leq d-1 < \deg \pi_A$

$\Rightarrow P=0 \Rightarrow \forall k \in \{0, \dots, d-1\}, \alpha_k = 0$

c) $\mathbb{R}[A]$ e.v. de dimension finie, alors $\mathbb{R}[A]$ est un f.e.i.

3) a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ & $\|A\| < r$
 $\Rightarrow \|a_n A^n\| \leq |a_n| \|A\|^n$.

or $\|A\| < r \Rightarrow \sum_{n \geq 0} |a_n| \cdot \|A\|^n$ est CV.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n A^n$ est abs CV $\Rightarrow$ CV.

b) on a. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A)$

or $P_n(A) \in \mathbb{R}[A] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(A) \in \mathbb{R}[A]$ (f.e.i.)

d'après 2.6/3! $P \in \mathbb{R}[A]$ & $P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \in \mathbb{R}[A]$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n = P(A)$.

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ abs CV } \Leftrightarrow (x \in \mathbb{R})$$

$$r=1$$

$$\cdot \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ abs CV, } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$r=+\infty$$

$$\Rightarrow \text{si } \|A\| < 1$$

$$\sum_{n \geq 0} A^n \text{ CV.}$$

$$\text{et } (I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Partie II

$$1) \cos A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!}$$

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ avec $\begin{cases} a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \\ a_{2n+1} = 0 \end{cases}$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = u_n(x)$$

$\forall x \neq 0$; $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} \rightarrow 0 < 1$
 D'après I.3/ $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} |u_n(x)|$ abscv, $\forall x \neq 0$
 et abscv pour $x=0$

$\Rightarrow r = +\infty$
 D'après I.3/ $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!}$ cv, $\forall A \in \mathcal{B}(E)$
 et $\exists ! R \in \mathcal{B}(E)$

$$\cos A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A^{2n}}{(2n)!} = R(A)$$

$$\text{Dm } \exists ! \varphi \in \mathcal{B}_{d-1}[X] \text{ q.}$$

$$\sin A = \varphi(A)$$

$$\begin{aligned} * \cdot \sin A \cdot \cos A &= R(A) \cdot \varphi(A) \\ &= (R \times \varphi)(A) = (\varphi \times R)(A) \\ &= \varphi(A) \times R(A) = \cos A \cdot \sin A \end{aligned}$$

Remarque $\rightarrow A \cos A = (\cos A) \cdot A$
 $\exp(A) = p(A)$ $A \sin A = (\sin A) \cdot A$
 $A \exp(A) = (x \mapsto p(x))(A) = (p \cdot x)(A)$
 $A \exp(A) = \exp(A) \cdot A$

$$e) \quad \varphi(t) = \cos^2(tA) + \sin^2(tA).$$

$$a) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ t \mapsto f(t) = \cos(tA).$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (tA)^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Soit } f_n(t) = \frac{(-1)^n (tA)^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$\sum_{n \geq 0} f_n: \text{C.S. sur } \mathbb{R}$$

$$\cdot \text{knear; } t \mapsto f_n(t) = \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} A^{2n} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \text{et } \begin{cases} f'_n(t) = \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n-1)!} A^{2n} \\ f'_0(t) = 0 \end{cases} \quad (A^{2n} = \text{cste})$$

$$\text{Soit } [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

$$\|f'_n(t)\| \leq \frac{|t|^{2n-1}}{(2n-1)!} \|A\|^{2n} \leq \frac{\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!} \|A\|^{2n} \text{ avec } \alpha = \max(|a|, |b|).$$

$$\sum_{n \geq 0} x^n \text{ abscv } \Leftrightarrow (x < 1) \\ r=1$$

$$\cdot \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \text{ abscv; } \forall x \in \mathbb{R} \\ r = +\infty$$

$$\cdot \text{S. } \|A\| < 1.$$

$$\sum_{n \geq 0} A^n \text{ C.V.}$$

$$\text{et } (I - A)^{-1} = \sum_{n \geq 0} A^n.$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [a, b]} \|f'_n(t)\| \leq \frac{d^{2n-1}}{(2n-1)!} \|A\|^{2n}.$$

$$a \sum_{n \geq 1} \frac{d^{2n-1}}{(2n-1)!} \|A\|^{2n} < \infty \text{ (D'Alembert)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f'_n \text{ CV} \Rightarrow \text{CV sur } [a, b]$$

Donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n-1)!} A^{2n}$$

$$= -A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} A^{2n+1}$$

$$\Rightarrow (\cos(tA))' = -A \sin(tA)$$

Continuité
 $t \mapsto A \cdot t$

$$\text{Donc } \varphi(t) = (\cos(tA) \cos(tA) + \sin(tA) \sin(tA)).$$

$t \mapsto \cos(tA)$ et $t \mapsto \sin(tA)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

et l'app. $B: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$
 $(P, Q) \mapsto PQ$ est bilinéaire et $L: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(t) = -A \sin(tA) \cos(tA) + \cos(tA) (-A \sin(tA)) + A \cos(tA) \sin(tA) + \sin(tA) (A \cos(tA))$$

$A, \sin(tA)$, et $\cos(tA)$ commutent les uns avec les autres.
 $\Rightarrow \varphi'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$e) \text{ on a } \varphi'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = ct = \varphi(a) = I_p$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = I_p \Leftrightarrow \cos^2 A + \sin^2 A = I_p$$

Partie III.

a) $A \in Sp(\mathbb{R})$; d'après le théorème spectral.

$$\exists P \in Op(\mathbb{R}) \text{ tq } A = {}^t P \cdot \text{diag}(d_1, \dots, d_p) P.$$

$$\Rightarrow \|A\| = \|\text{diag}(d_1, \dots, d_p)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^p d_i^2}$$

$$\Rightarrow \|A\|^2 = \sum_{i=1}^p d_i^2 \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, p\}, d_k^2 \leq \|A\|^2 \Rightarrow |d_k| \leq \|A\|$$

b) on a $A = {}^t P \text{diag}(d_1, \dots, d_p) P$

$$\exists e = {}^t P \text{diag}(e^1, \dots, e^p) P \text{ d'après 1 et 2.}$$

$$\Rightarrow e^A \in Sp(\mathbb{R})$$

$$\text{et } \left\{ e^A \in Sp(\mathbb{R}) \right\} = \left\{ e^1, \dots, e^p \right\} \subset \mathbb{R}^p \Rightarrow e^A \in Sp^+(\mathbb{R})$$

$$A = {}^t P \begin{pmatrix} d_1 I_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_r I_{m_r} \end{pmatrix} P$$

avec $m_i = \text{mul}(d_i)$

$$\Rightarrow e^A = {}^t P \begin{pmatrix} e^{d_1 I_{m_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_r I_{m_r}} \end{pmatrix} P.$$

si $d_i \neq d_j \Rightarrow e^{d_i} \neq e^{d_j}$
Alors

$$\text{mul}(e^{d_i}) = m_i = \text{mul}(d_i)$$

$$d) \text{ si } d \nmid p \nmid A \Rightarrow \exists V \neq 0 \text{ t.p. } AV = dV$$

$$\Rightarrow e^A \cdot V = e^d V \Rightarrow$$

$$\text{ker}(A - dI_p) \subset \text{ker}(e^A - e^d I_p).$$

Acte e^A est diagonalisable.

$$\Rightarrow \dim \text{ker}(A - dI_p) = \text{mul}(d) \stackrel{b}{=} \text{mul}(e^d) \\ \Rightarrow \dim \text{ker}(e^A - e^d I_p)$$

$$\text{Donc } \text{ker}(A - dI_p) = \text{ker}(e^A - e^d I_p)$$

Partie IV

$$1) \text{ exp: } S_p(\mathbb{R}) \longrightarrow S_p^{++}(\mathbb{R})$$

$$A \longmapsto e^A$$

$$a) \text{ soit } B \in S_p^{++}(\mathbb{R}); \exists A \in S_p(\mathbb{R}) \text{ t.p. } \text{exp}(A) = B.$$

$$B = {}^t P \text{diag.}(d_1, \dots, d_p) P \text{ avec } d_i > 0$$

$$\forall i \leq p; d_i > 0 \Rightarrow \exists \mu_i \in \mathbb{R} \text{ t.p. } d_i = e^{\mu_i}$$

$$\Rightarrow \exists A = {}^t P \text{diag.}(L_n d_1, \dots, L_n d_p) P.$$

$$\text{et } e^A = {}^t P \text{diag.}(d_1, \dots, d_p) P = B$$

$\Rightarrow \text{exp est surjectif}$

b) Soit $A, B \in \text{Sp}(R)$ tq. $e^A = e^B$.

$$\begin{aligned} \text{Si } dV_p \in A &\Rightarrow \ker(A - dI_p) = \ker(e^A - e^d I_p) \\ &= \ker(e^B - e^d I_p) \neq \{0\} \\ &= \ker(B - dI_p) \end{aligned}$$

et si $dV_p \in B$ alors $\text{rang}(dV_p) = m$
 $\Rightarrow e^d V_p \in e^B$ " $\text{rang}(e^d V_p) = m$) d'après a-b

$$\Rightarrow \ker(B - dI_p) \neq \{0\} \Rightarrow dV_p \in B.$$

$$\Rightarrow \ker(A - dI_p) = \ker(B - dI_p)$$

c) On a. A et B sont diagonalisables
 et $\forall dV_p \in A$ ($dV_p \in B$). $E_d(A) = E_d(B)$

$$\pi_p(R) = \bigoplus_{i=1}^n E_{d_i}(A) = \bigoplus_{i=1}^n E_{d_i}(B)$$

$\Rightarrow \exists B' = (B_1, \dots, B_r)$ bases de $\pi_p(R)$ et $\forall dV_p \in A$ ($dV_p \in B$)
 $\Rightarrow A = p \begin{pmatrix} d_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & d_r I_{m_r} \end{pmatrix} p^{-1} = B'$

$\Rightarrow$ exp est injective
 $\Rightarrow$ bijective.

4/05

1.