

Fonction vectorielle

Exercice 1

$$1) g(t) = \|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle.$$

La fonction f est dérivable sur I et l'app $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, alors

g est dérivable sur I et

$$\forall t \in I; g'(t) = \langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle \\ = 2\langle f'(t), f(t) \rangle.$$

2) si $f(t) \neq 0 \forall t \in I$.

$$h(t) = \|f(t)\| = \sqrt{g(t)}.$$

$t \mapsto g(t)$ est dérivable sur I et a valeurs st positive; alors la fonction

h est dérivable sur I .

$$\forall t \in I, h'(t) = \frac{g'(t)}{2\sqrt{g(t)}} = \frac{2\langle f'(t), f(t) \rangle}{2\|f(t)\|}.$$

$$h'(t) = \frac{\langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t)\|}.$$

Exercice 3'

$f: \mathbb{R} \rightarrow O_n(\mathbb{R})$ dérivable.
 $x \mapsto f(x)$

1) soit $A(x) = f(x) \cdot {}^t f'(x)$.

ona $f(x) \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(x) \cdot {}^t f(x) = I_n$.

soit $h(x) = f(x) \cdot {}^t f(x)$.

et $B: (A, B) \rightarrow A \times {}^t B$.

L'application B est bilinéaire et f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors l'application

$h: x \mapsto h(x) = B(f(x), f(x))$ est dérivable.

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ et } h'(x) = B(f'(x), f(x)) + B(f(x), f'(x))$$

$$\Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot {}^t f(x) + f(x) \cdot {}^t f'(x)$$

Comme $h(x) = I_n = \text{cte}$, alors $h'(x) = 0$.

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \cdot {}^t f(x) + f(x) \cdot {}^t f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \cdot {}^t f'(x) = -f'(x) \cdot {}^t f(x)$$

ona $A(x) = f(x) \cdot {}^t f'(x)$

$$\Rightarrow {}^t(A(x)) = f'(x) \cdot {}^t f(x) = -A(x)$$

$\Rightarrow A(x)$ est antisymétrique.

$\Rightarrow$ Orma $f(x) \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(f'(x)) = \pm 1$
 Or $\det(f(x) \cdot f'(x)) = \det(-f(x) \cdot f'(x))$
 $= (-1)^n \det(f(x) \cdot f'(x))$
 $\Rightarrow \det(f(x)) \cdot \det(f'(x)) = (-1)^n \det(f(x)) \cdot \det(f'(x))$
 $\Rightarrow \det(f'(x)) = (-1)^n \det(f'(x))$
 Si n est impaire $\Rightarrow \det(f'(x)) = 0$.

Exercice 5

$n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$.

$\downarrow$ $\varphi(t) = \det(I_n + tA)$
 $\forall t \neq 0: = \det(t(A + \frac{1}{t}I_n))$
 $= \det(tI_n) \det(A + \frac{1}{t}I_n)$
 $= t^n \cdot \chi_A(\frac{1}{t})$
 $= t^n \left(\frac{1}{t^n} + \text{tr}(-A) \frac{1}{t}^{n-1} + a_{n-2} \frac{1}{t}^{n-2} + \dots + (-1)^n \right)$
 $= 1 + \text{tr}(A) \cdot t + a_{n-2} t^2 + \dots + (-1)^n t^n$
 $= 1 + \text{tr}(A) t + P(t); \dots; P \geq 2$

$\Rightarrow$ D'après 4/

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{tr}(A) + P(t)}{t}$$

Or $\text{vol}(P) \geq 2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t)}{t} = 0$
 $\Rightarrow \varphi'(0) = \text{tr}(A)$

Exercice 7

$\dim E < \infty$

$\downarrow \forall f \in \mathcal{X}(E)$, f est continue.
 et on a $\dim E < \infty \Rightarrow B_f(0,1) = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$
 $B_f(0,1)$ est un fermé et borné $\Rightarrow$ Compact.

Ainsi f est bornée sur $B_f(0,1)$.

$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ existe dans $\mathbb{R}$.

Ce qui montre que l'app. N est bien définie.

* Hq N est une norme sur E .

Soit $f \in \mathcal{X}(E)$ tq $N(f) = 0 \Leftrightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = 0$
 $\Rightarrow \forall x; \|x\| \leq 1; \|f(x)\| = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0_E$.

Pour $x \in E$ tq: $\frac{x}{\|x\|} \in B_f(0,1)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\|x\|} = 0_E \Rightarrow f(x) = 0_E \quad \forall x \in E$

$\Rightarrow \|f\| = 0$

* Soit $\lambda \in \mathbb{K}; N(\lambda f) = \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda f(x)\|$
 $= |\lambda| N(f)$

2) On a $\forall x \in E; \|x\| \leq 1$:

$$\|f(x)\| \leq N(f)$$

Soit $x \in E \setminus \{0\}$: $\frac{x}{\|x\|} \in B_E(0,1)$

$$\Rightarrow \|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \leq N(f)$$

$$\Rightarrow \|f(x)\| \leq \|x\| \cdot N(f) \quad \text{vrai aussi pour } x=0.$$

$$\Rightarrow \|f \circ g(x)\| \leq \|g(x)\| \cdot N(f)$$

$$\Rightarrow \sup_{\|x\| \leq 1} \|f \circ g(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|g(x)\| \cdot N(f)$$

$$\Rightarrow N(f \circ g) \leq N(f) \cdot N(g)$$

2) $\forall f \in \mathcal{L}(E); N(f^n) \leq \frac{(N(f))^n}{n!}$

$$\text{or } \sum_{n \geq 0} \frac{(N(f))^n}{n!} \text{ cv. (car } e^{N(f)} \text{)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{f^n}{n!} \text{ est abs cv} \Rightarrow \text{cv.}$$

3) Soit $h_n(t) = \frac{t^n \cdot f^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}; h_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$h'_n(t) = \frac{t^{n-1} f^n}{(n-1)!}; h'_0(t) = 0$$

Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

$$\sup_{t \in [a,b]} N(h_n(t)) \leq \frac{c^n (N(f))^n}{n!}; c = \sup_{t \in [a,b]} |t|$$

$$\text{or } \sum_{n \geq 0} \frac{c^n (N(f))^n}{n!} \text{ cv.}$$

D'où $\sum_{n \geq 0} h_n$ cv sur $[a,b] \Rightarrow \text{cv}$

Ainsi la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}; \varphi'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} f^{n+1} \\ &= f \circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} f^n \\ &= f \circ \varphi(t) \quad (g \mapsto f \circ g \text{ est continue}) \end{aligned}$$

$$\varphi'(t) = f \circ \exp(t f).$$

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E)$$

$$t \mapsto \varphi(t) = \exp(t f) \circ \exp(-t f)$$

car: $t \mapsto \exp(t f)$ et $t \mapsto \exp(-t f)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

et $\mathcal{L}_{app}(h,g) \mapsto h \circ g$ est bilinéaire

Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}; \varphi'(t) = f \circ \exp(t f) \circ \exp(-t f) = \exp(t f) \circ f \circ \exp(-t f)$$

$$\text{or } f \circ \exp(t f) = \exp(t f) \circ f \Rightarrow \varphi'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

b) On a $\gamma'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \gamma(t) = \gamma(0) = \text{id}_E, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \exp(t f) \circ \exp(-t f) = \text{id}_E$

$\Leftrightarrow \exp(t f)$ est bijective et

$(\exp(t f))^{-1} = \exp(-t f), \forall t \in \mathbb{R}$

$(\exp(f))^{-1} = \exp(-f)$

5) a) $\gamma(t) = \exp(t(f+g)) \circ \exp(t f) \circ \exp(-t g)$

$t \mapsto \exp(t(f+g))$

$t \mapsto \exp(t f)$ et $t \mapsto \exp(t g)$ ~~est~~

dérivables, alors γ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\gamma'(t) = (\exp(t(f+g)) \circ \exp(t f))' \exp(-t g)$
 $+ \exp(t(f+g)) \circ \exp(t f) (-g) \exp(-t g)$

$= [(f+g) \circ \exp(t(f+g)) \circ \exp(t f) - \exp(t(f+g)) \circ \exp(t f)] \exp(-t g)$
 $- \exp(t(f+g)) \circ \exp(t f) \circ (g) \exp(-t g)$

b) Si $g \circ f = f \circ g$, alors

$\gamma'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \gamma(t) = \text{id}_E = \gamma(0)$

$\Rightarrow \gamma(1) = \text{id}_E \Leftrightarrow \exp(f+g) \exp(-f) \exp(-g) = \text{id}_E$

$\Rightarrow \gamma(1) = \text{id}_E \Leftrightarrow \exp(f+g) = \exp(f) \circ \exp(g)$

Exercice 2

$$A(t) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq n}}$$

1) A est dérivable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall i, j$
 a_{ij} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\det(A(t)) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}(t)$$

Puisque $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i, \sigma(i)}$ est dérivable

Alors Π et Σ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \det$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

2) $n=2 \Leftrightarrow A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}$

1^{ère} méthode

$$\det(A(t)) = a(t)d(t) - b(t)c(t)$$

$$(\det A(t))' = a'(t)d(t) + a(t)d'(t) - b'(t)c(t) - b(t)c'(t)$$

2^{ème} méthode

L'app $\det$ est bilinéaire / au vecteurs
 Colonnes. et les colonnes sont dérivables
 Alors

$$\begin{aligned} (\det(A(t)))' &= \begin{vmatrix} a'(t) & c(t) \\ b'(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & c'(t) \\ b(t) & d'(t) \end{vmatrix} \\ &= a'(t)d(t) - c(t)b'(t) + a(t)d'(t) - c'(t)b(t) \end{aligned}$$

Exercice 4

1) $F^\perp = \{y \in E; \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in F\}$

$$F^\perp \subset E$$

$$0 \in F^\perp$$

$\therefore$ soit $y_1, y_2 \in F^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\langle x, \lambda y_1 + y_2 \rangle = \lambda \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle = 0 \quad \forall x \in F$$

$\Rightarrow F^\perp$ est un s.e.v. de E .

* Il q si F est stable par U , alors $F^\perp$ est stable par U .

soit $y \in F^\perp$, mg $U(y) \in F^\perp$

Soit $x \in F$; $\langle U(y), x \rangle = \langle y, U(x) \rangle$

Comme F est stable par U , alors $U(x) \in F$

$\Rightarrow \langle y, U(x) \rangle = 0$ car $y \in F^\perp$

$\Rightarrow \langle U(y), x \rangle = 0, \forall x \in F$

$\Rightarrow U(y) \in F^\perp \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par U .

a) Soit $\psi(x) = \langle U(x), x \rangle$.

On pose $f: E \longrightarrow E \times E$
 $x \longmapsto (U(x), x)$

soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= (U(\lambda x + y), \lambda x + y) \\ &= (\lambda U(x) + U(y), \lambda x + y) \\ &= \lambda (U(x), x) + (U(y), y) \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ est linéaire.

De plus $\dim E < \infty \Rightarrow f$ est continue.

et on a l'app $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire

et $\dim E < \infty \Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue

Alors l'app $\langle \cdot, \cdot \rangle \circ f = \psi$ est continue sur E .

b) Soit $H = \{x \in F; \|x\| = 1\}$
 $= F \cap S(0, 1)$

$\dim E < \infty$ et F un s.e.v. de E , alors

F est un fermé et on a $S(0, 1)$ est un compact ($\dim < \infty$) $\Rightarrow$

H est un fermé inclus dans un

Compact $\Rightarrow H$ est un compact.

L'app ψ est continue et a valeurs dans $\mathbb{R}$, alors ψ est borné et atteint ses bornes. $\Rightarrow \exists x_0 \in H$ tq.

$$\sup_{x \in H} \psi(x) = \psi(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in H} \langle U(x), x \rangle = \langle U(x_0), x_0 \rangle$$

$\exists y \in F; \|y\| = 1$, et $\langle x_0, y \rangle = 1$
 on a $t \mapsto \gamma(t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$
 et U app linéaire $\Rightarrow t \mapsto U(\gamma(t))$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$U(\gamma(t))' = U(\gamma'(t))$ qui est continue puisque U est continue ($\dim E < \infty$)

$\Rightarrow t \mapsto U(\gamma(t))$ est C^1 .

D'autre part

L'app $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire. Alors

ψ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}; \psi'(t) = \langle U(\gamma'(t)), \gamma(t) \rangle + \langle U(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

$$4) \|\gamma(t)\|^2 = \|\cos t x_0 + \sin t y\|^2 \quad (\text{car } \langle x_0, y \rangle = 0)$$

$$= \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\Rightarrow \|\gamma(t)\| = 1.$$

(6)

ma $x_0 \in F$ et $y \in F \Rightarrow \gamma(t) \in F, \forall t \in \mathbb{R}$
 De plus $\|\gamma(t)\| = 1$, alors

$$\varphi(t) = \langle U(\gamma(t)), \gamma(t) \rangle \leq \sup_{x \in F, \|x\|=1} \langle U(x), x \rangle$$

$$\Leftrightarrow \varphi(t) \leq \varphi(0), \forall t \in \mathbb{R} \quad \langle U(x_0), x_0 \rangle$$

$\Rightarrow \varphi$ admet un maximum sur $\mathbb{R}$ en 0

$$\Rightarrow \varphi'(0) = 0.$$

$$\begin{aligned} 5). \text{ On a } \varphi'(0) &= \langle U(\gamma'(0)), \gamma(0) \rangle + \langle U(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle \\ &= \langle U(y), x_0 \rangle + \langle U(x_0), y \rangle \\ &= \langle y, U(x_0) \rangle + \langle U(x_0), y \rangle \\ 0 &= 2 \langle U(x_0), y \rangle \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \langle U(x_0), y \rangle = 0$$

Exercice 6

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Alors d'après la formule de Taylor avec reste intégrale.

$$\forall h > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \int_x^{x+h} (x+h-t) f''(t) dt.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x) - \int_x^{x+h} (x+h-t) f''(t) dt}{h}.$$

$$\Rightarrow \|f'(x)\| \leq \frac{2\pi_0}{h} + \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (x+h-t) \|f''(t)\| dt.$$

$$\leq \frac{2\pi_0}{h} + \frac{\pi_2}{h} \int_x^{x+h} (x+h-t) dt$$

$$\leq \frac{2\pi_0}{h} + \frac{\pi_2}{h} \left[\frac{(x+h-t)^2}{2} \right]_x^{x+h}$$

$$\Rightarrow \|f'(x)\| \leq \frac{2\pi_0}{h} + \frac{\pi_2 h}{2}.$$

$$2) \forall h > 0, \|f'(x)\| \leq \frac{2\pi_0}{h} + \frac{h\pi_2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f'$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \|f'(x)\| \leq \frac{2\pi_0}{h} + \frac{h\pi_2}{2}, \forall h > 0.$$

$$\text{On pose } \varphi(t) = \frac{2\pi_0}{t} + \frac{t\pi_2}{2}, t > 0.$$

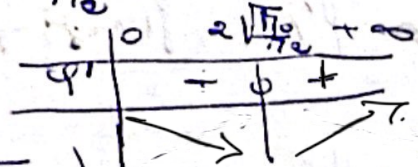
φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\varphi'(t) = -\frac{2\pi_0}{t^2} + \frac{\pi_2}{2}, \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi_0}{t^2} = \frac{\pi_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 4 \frac{\pi_0}{\pi_2} \quad \pi_2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2\sqrt{\frac{\pi_0}{\pi_2}} : t > 0$$



$$\Rightarrow \inf_{t \in]0, +\infty[} \varphi(t) = \varphi\left(2\sqrt{\frac{\pi_0}{\pi_2}}\right)$$

$$= 2\sqrt{\pi_0 \pi_2}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in]0, +\infty[} \|p'(x)\| \leq 2\sqrt{\pi_0 \pi_2} = \varphi\left(2\sqrt{\frac{\pi_0}{\pi_2}}\right)$$

Problème "MP 2022"

I) Partie préliminaire

1) $\forall t \in \mathbb{R}: \varphi(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k N^k$

$= \sum_{k=0}^d a_k N^k(t)$

avec $N_k(t) = t^k N^k = \binom{k}{i,j} t^i b^j$ avec $\binom{k}{i,j}$

sont les coefficients de N^k qui ne dépendent pas de t .

Comme $k \leq d$; $t \mapsto t^k b^j$ est C^∞ $\forall i, j \leq n$

Alors N_k est C^∞ sur $\mathbb{R} \Rightarrow \varphi$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$
et $N_0'(t) = 0$; $\forall k \geq 1: N_k'(t) = k t^{k-1} N^k$

D'où $\varphi'(t) = \sum_{k=1}^d k t^{k-1} N^k$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

2) Pour $d=1$ $\varphi(t) = a_0 t + a_1 t N$
 $\varphi'(t) = a_1 N$

$\varphi(t) = \exp(\varphi(t)) = \exp(a_0 t + a_1 t N)$
 $= \exp(a_0 t) \exp(a_1 t N)$ (car $a_0 t$ et $a_1 t N$ commutent)
 $= e^{a_0 t} \exp(a_1 t N)$

soit $f(t) = \exp(a_0 t N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_0 t N)^n}{n!}$

$3 = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$

avec $f_n(t) = (a_0 t N)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ (d'après 1/)

$f_0'(t) = 0$; $\forall n \geq 1: f_n'(t) = n a_0 t^{n-1} N^n$

soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$: $\sup_{t \in [a, b]} |f_n'(t)| \leq \frac{n |a_0| C^{n-1} \|N\|^n}{n!}$

avec $C = \max(|a|, |b|)$

or $\sum_{n \geq 1} n |a_0| C^{n-1} \frac{\|N\|^n}{n!} < +\infty$ (d'après 2/)

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n' \subset N \Rightarrow C \cup \text{sur tout seg } [a, b] \subset \mathbb{R}$

Ceci montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et que $f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_0 t^{n-1} \frac{N^n}{n!}$
 $= \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 t^n \frac{N^{n+1}}{n!}$

$\frac{f'(t)}{f(t)} = a_1 N \exp(a_1 t N)$

Car $(u \mapsto N u)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$

Ainsi $\varphi'(t) = \varphi'(t) \varphi(t)$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$.

Supposons le résultat est vrai à l'ordre $d-1$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{d+1} a_k t^k N^k = \sum_{k=0}^d a_k t^k N^k + a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi(t) &= \exp(\varphi(t)) \\ &= \exp(\varphi_1(t) + a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1}) \\ &= \exp(\varphi_1(t)) \cdot \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1}) \end{aligned}$$

(puisque φ_1 et $a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1}$ commutent)

Par hypothèse de récurrence, $\exp(\varphi_1(t))$ est dérivable et $(\exp(\varphi_1(t)))' = \varphi_1'(t) \exp(\varphi_1(t))$

D'autre part l'app $t \mapsto \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1})$ est la composée de l'app $t \mapsto \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1})$ et $t \mapsto t^{d+1}$, alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(t) = (d+1)t^d \cdot a_{d+1} N^{d+1} \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1})$

Finalement comme $\varphi(t) = \exp(\varphi_1(t)) \times h(t)$ et en utilisant l'app bilinéaire $(A, B) \mapsto A \times B$ sur $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$

On déduit que φ est dérivable, et que $\varphi'(t) = \varphi_1'(t) \exp(\varphi_1(t)) \cdot h(t) + \exp(\varphi_1(t)) \cdot h'(t)$

$$\begin{aligned} &= \varphi_1'(t) \exp(\varphi_1(t)) h(t) + \exp(\varphi_1(t)) \cdot (d+1) t^d a_{d+1} N^{d+1} \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1}) \\ &\Rightarrow \varphi_1 \text{ et } h \text{ commutent et } N^{d+1} a_{d+1} = a_{d+1} N^{d+1} \\ &= \varphi_1'(t) + (d+1) t^d a_{d+1} N^{d+1} \exp(\varphi_1(t) + a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1}) \\ &= \varphi'(t) \exp(\varphi(t)) \end{aligned}$$

Alors le résultat est vrai à l'ordre $d+1$.

3) $\varphi'(t) = \varphi'(t) \cdot \varphi(t)$
 φ est $C^\infty \Rightarrow \varphi'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $t \mapsto \varphi(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 et en utilisant la fonction $(A, B) \mapsto A \cdot B$ bilinéaire.
 On déduit que $t \mapsto \varphi'(t) = \varphi'(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi''(t) = \varphi''(t) \varphi(t) + \varphi'(t) \varphi'(t)$
 $\varphi''(t) = \varphi''(t) \varphi(t) + (\varphi'(t))^2 \varphi(t)$

Partie I

i) $\forall \pi \in \Pi_n(\mathcal{C})$, on a $\text{escr}(\Gamma - \Gamma) = \text{escr}(0_n)$
 $= \Gamma_\eta.$

$$\exp(\pi) \cdot \exp(-\pi)$$

Car Net-7 comptaient.

$\Rightarrow \text{exp} \pi$ est inversible et $(\text{exp}(\pi))^{-1} = \text{exp}(-\pi)$

e) Soit $A = I_n + N$ avec N nilpotente...

$$c(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k n^k$$

a) φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$. d'après le théorème

$$\begin{aligned} \text{et } \varphi'(t) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{k-1} N^k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} N^k \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} n^k$$

$$\Rightarrow (I_n + tN) \varphi'(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} N^k + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^k N^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} N^k - \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} t^{k-1} N^k$$

$$\Rightarrow = N - (-1)^n \epsilon^n N^{n+1} \quad (N^n = \sim)$$

b) $\psi(t) = \exp(\hat{\psi}(t))$

c) D'après le préliminaire, γ est donc fois dérivable sur $\mathbb{R}$. et on a.

$$\psi'(t) = \varphi'(t) \cdot \varphi(t).$$

$$\Rightarrow (I_n + tN) \psi'(t) = (I_n + tN) \psi'(t) \psi(t) = N \psi(t). \quad (\text{diagonal})$$

*) En dérivant la relation précédente et en utilisant que L'app. $(A, B) \mapsto A \cdot B$ est bilinéaire et L'app $A \mapsto NA$ est linéaire, on obtient :

$$N\psi'(t) + (I_n + tN)\psi''(t) = N\psi'(t)$$

$$\Leftrightarrow (I_n + tN) \varphi''(t) = 0_n$$

ii) N ist nilp. $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, t \cdot N$ ist nilpotente $\Rightarrow \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t \cdot N\} = \{0\}$

$$\Rightarrow \mathbb{S}_P(\Gamma + tW) = \{1\} \Rightarrow 0 \text{ ist pers.}$$

$\Rightarrow$ $I_n + tN$ est inversible

Pour $t=0$, $I_n + tN = I_n$

Comme : $(I_{n+1} N) \psi(t) = 0$

Comme $(I_n + tN)$ est inversible $\Rightarrow \underline{t''(t) = 0_n}$

iii) $\phi''(t) = 0_n$.

$$\Rightarrow \psi'(t) = C_1 \quad \text{avec } C_1 \in \mathbb{R}_n(\mathbb{C})$$

③ or $\psi'(0) = N\psi(0) = \exp(\psi(0)) = \exp(I_n) = I_n$

$$\Rightarrow C_1 = N = \varphi'(t)$$

$$\Rightarrow \varphi(t) = Nt + C_2$$

$$\text{or } \varphi(0) = I_n \Rightarrow C_2 = I_n \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = tN + I_n}$$

c) D'après a) $\varphi(1) = N + I_n = A$.

$$\Rightarrow A = \exp(\varphi(1))$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^d \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k\right)$$

$$\Rightarrow \exists B = \sum_{k=1}^d \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k \text{ tq } A = \exp(B)$$

3) $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $A = \lambda I_n + N$.

$$= \lambda \left(I_n + \frac{1}{\lambda} N \right)$$

on a $\frac{1}{\lambda} N$ est nilp d'ap e-c/ $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq

$$A = \exp(B)$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$

$$= \exp(L_n |\lambda| + i\theta)$$

$$\Rightarrow A = \lambda \exp(B)$$

$$= \exp((L_n |\lambda| + i\theta) I_n) \exp B$$

$$= \exp((L_n |\lambda| + i\theta) I_n + B)$$

$$A = \exp B' \text{ avec } B' = (L_n |\lambda| + i\theta) I_n + B$$

4) $A \in GL_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A_j = \lambda_j I_{n_j} + N_j, \lambda_j \in \mathbb{C}^*$$

$$= \exp(B_j) \text{ d'après 3/}$$

$$\Rightarrow A = P^{-1} \begin{pmatrix} \exp B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp B_k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P^{-1} \exp \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \exp \left(P^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix} P^{-1} \right)$$

$$A = \exp B \text{ avec } B = P^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_k \end{pmatrix} P^{-1}$$

5) D'après ce qui précède

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{C}) : \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tq } A = \exp(B)$$

$$GL_n(\mathbb{C}) \subset \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$$

D'autre part d'après 1/

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$$

6) Ainsi $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$