

Fonctions Vectorielles

Exercice 1 .

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire et on considère une fonction $f : I \rightarrow E$.

1. Montrer que si f est dérivable sur I , alors la fonction

$$g : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \|f(t)\|^2$$

est dérivable sur I et donner $g'(t), \forall t \in I$.

2. Dédurre que si $f(t) \neq 0, \forall t \in I$ alors

$$h : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \|f(t)\|$$

est dérivable sur I et donner $h'(t), \forall t \in I$.

Exercice 2 .

Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $t \mapsto A(t)$

1. Montrer que l'application $t \mapsto \det(A(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
2. On suppose dans cette question que $n = 2$. Calculer de deux manières différentes $(\det(A(t)))'$.

Exercice 3 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), {}^tAA = I_n\}$: l'ensemble des matrices orthogonales.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow O_n(\mathbb{R})$ une fonction dérivable.
 $x \mapsto f(x)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) {}^t f'(x)$ est une matrice antisymétrique.
2. Montrer que si n est impaire, alors $f'(x)$ n'est pas inversible.

Exercice 4 .

Soit E un $\mathbb{R}$ -e.v. de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée. On considère u un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x, y \in E \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Soit F un s.e.v de E tel que $F \neq \{0_E\}$.

1. a) Montrer que l'application $g : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ est continue sur E .
- b) Dédurre qu'il existe $x_0 \in F$ tel que $\|x_0\| = 1$ vérifiant

$$\sup_{x \in F, \|x\|=1} \langle u(x), x \rangle = \langle u(x_0), x_0 \rangle.$$

Pour $y \in F$ tel que $\|y\| = 1$ et $\langle x_0, y \rangle = 0$, on définit les fonctions suivantes :

$$\gamma(t) = x_0 \cos(t) + y \sin(t) \text{ et } \varphi(t) = \langle u(\gamma(t)), \gamma(t) \rangle, t \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que φ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $\varphi'(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
3. Vérifier que $\|\gamma(t)\| = 1$ et que $\varphi'(0) = 0$.
4. Dédurre que $\langle u(x_0), y \rangle = 0$.

Exercice 5 .

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi(t) = \det(I_n + tA)$

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi(t) = 1 + \text{tr}(A)t + P(t)$ avec $\text{val}(P) \geq 2$.

(On rappelle que $\text{val}(P)$ est le plus petit exposant apparaissant dans l'expression de P .)

2. Déduire que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = \text{tr}(A)$.

Exercice 6 .

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n de dimension finie et $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ une fonction borné et de classe C^2 . On suppose aussi que f'' est borné. On note

$$M_0 = \sup\{\|f(x)\|, x \in \mathbb{R}\}, \quad M_2 = \sup\{\|f''(x)\|, x \in \mathbb{R}\}.$$

1. Soit $h > 0$. Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\|f'(x)\| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

2. En déduire que f' est bornée et que $M_1 = \sup\{\|f'(x)\|, x \in \mathbb{R}\} \leq 2\sqrt{M_0M_2}$

Exercice 7 .

Partie I.

L'objectif de cette partie est de montrer que si $A, B \in M_p(IK)$ tels que $AB = BA$, alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on consi  re $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^p$.

Pour tout $A \in M_p(IK)$, on pose $N(A) = \sup_{\|X\| \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$.

1. Justifier que l'application N est bien définie sur $M_p(IK)$ et que c'est une norme.

2. Montrer que $\forall A, B \in M_p(IK)$, tels que $AB = BA$, alors $B\exp(A) = \exp(A)B$.

3. Montrer que $\forall A, B \in M_p(IK)$ $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est convergente. On note

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

5. On pose $f : \mathbb{R} \longrightarrow M_p(\mathbb{R})$
 $t \longmapsto f(t) = \exp(tA)$

6. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que
 $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(t) = A^k \exp(tA), \forall t \in \mathbb{R}$.

7. Pour $A \in M_p(IK)$, on pose

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow M_p(\mathbb{R})$$

$$t \longmapsto \psi(t) = \exp(tA)\exp(-tA)$$

a) Justifier que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\psi'(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

b) Déduire que la matrice $\exp(A)$ est inversible et donner $(\exp(A))^{-1}$.

8. Pour $A, B \in M_p(IK)$, on pose

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow M_p(\mathbb{R})$$

$$t \longmapsto \varphi(t) = \exp(t(A + B))\exp(-tA)\exp(-tB)$$

a) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi'(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

b) Déduire si $AB = BA$, alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.

9. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On consi  re la fonction vectorielle définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$u(t) = \exp(tA)X_0, \quad t > 0.$$

Montrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner l'expression de u' .

Exercice 8 .

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \longmapsto f(t) = (\cos t, \sin t)$

1. Montrer que l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$ est régulier.

2. Déterminer l'équation de la tangente au point $A = (f(\frac{\pi}{4}))$ ainsi que l'équation de la normale.

Exercice 9 .

Soit $p > 0$, $(\mathbb{R}, f)$ l'arc paramétré plan de support Γ , donné par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto f(t) = (t, 2pt^2)$$

1. Justifier que l'arc est régulier.

2. Soit $M \in \Gamma$.

Combien existe-t-il de point $N \in \Gamma \setminus \{M\}$ tel la normale à Γ en N passe par M . Dans le cas où il existe deux points N_1 et N_2 , montre que la droite (N_1, N_2) passe par un point fixe ne dépend pas de t .

Problème.

Notations

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- La matrice identité et la matrice nulle sont notées respectivement I_n et $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
- Pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, on note par $\text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $d_{ii} = \alpha_i$.
- Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note respectivement ${}^tM$, $\text{rg}(M)$ et $\text{Sp}(M)$ la transposée de M , le rang de M et son spectre.
- Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k$ l'exponentielle de la matrice M .
- On pourra utiliser librement le résultat suivant :
 $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,
 - a) $\exp(P^{-1}MP) = P^{-1}\exp(M)P$.
 - b) $\exp({}^tM) = {}^t(\exp(M))$.
 - c) $\exp(\alpha I_n) = \exp(\alpha)I_n$.

Partie préliminaire

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On pose

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), t \mapsto \sum_{k=0}^d a_k t^k N^k \text{ et } \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), t \mapsto \exp(\varphi(t)).$$

1. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout

$$t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \sum_{k=1}^d k a_k t^{k-1} N^k$$

2. Montrer, par récurrence sur $d \in \mathbb{N}^*$, que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = \varphi'(t)\psi(t)$.

3. Montrer que ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Partie I : L'image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par la fonction exponentielle

Dans cette partie on se propose de montrer que l'image directe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par la fonction exponentielle est égale à $\text{GL}_n(\mathbb{C})$; c'est-à-dire $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $\exp(M)$ est inversible. On vient ainsi de montrer que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Dans la suite de cette partie on veut montrer l'inclusion réciproque.

2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente et $A = I_n + N$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k N^k.$$

(a) Montrer φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(I_n + tN)\varphi'(t) = N$.

(b) On pose, pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \exp(\varphi(t))$.

- i. Montrer que ψ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(I_n + tN)\psi'(t) = N\psi(t) \text{ et } (I_n + tN)\psi''(t) = 0.$$

- ii. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi''(t) = 0$.

- iii. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = tN + I_n$.

3. Montrer alors qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(B) = A$.

4. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $A = \lambda I_n + N$. En remarquant que $A = \lambda(I_n + \frac{1}{\lambda}N)$, montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(B) = A$.

5. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. On rappelle qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_k \end{pmatrix} P,$$

où les matrices $A_j, j \in \{1, \dots, k\}$, sont de la forme $\lambda_j I_{n_j} + N_j$ avec $n_j \in \mathbb{N}^*$, $N_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$ est une matrice nilpotente et $\lambda_j \in \mathbb{C}^*$.

En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(B) = A$.

6. Montrer alors $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) = \text{GL}_n(\mathbb{C})$.