

Rappel.

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}).$$

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

$$\exp(O_n) = I_n.$$

$$\exp(\alpha \cdot I_n) = e^\alpha \cdot I_n$$

$$\text{Si } AB = BA \Rightarrow \exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B.$$

$$\text{Si } \exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$$

$$t \mapsto \exp(tA) \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$(\exp(tA))' = A \exp(tA).$$

$$* \text{ Si } AB = BA \Rightarrow (\exp A)B = B(\exp A)$$

10/10 / 10/10 / 10/10

Probleme

Partie préliminaire:

1) $\varphi(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k N^k$; $N \in \Gamma_n(\mathbb{T})$

$t \mapsto t^k N^k$ $\left(\begin{matrix} k \\ n_{ij,k} \end{matrix} \right) a_{0,k}$

Fig. $t \mapsto t^k$ $(N^k = (n_{ij,k}))$ $a_{0,k}$

$\Rightarrow t \mapsto t^k N^k$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow t \mapsto \varphi(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k N^k$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

et $\varphi'(t) = \sum_{k=1}^d k a_k t^{k-1} N^k$

e)

2) Pour $d=1$: $\varphi(t) = a_0 I_n + a_1 t N$

$\varphi(t) = \exp(\varphi(t)) = \exp(a_0 I_n + a_1 t N)$

$= \exp(a_0 I_n) \cdot \exp(a_1 t N)$ $\left(\begin{matrix} \text{Car:} \\ a_0 I_n \text{ et } N \\ \text{commutent} \end{matrix} \right)$

$= e^{a_0} \cdot \exp(a_1 t N)$

$t \mapsto \exp(a_1 t N)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et $\varphi'(t) = e^{a_0} a_1 N \cdot \exp(a_1 t N)$

$= a_1 N \varphi(t) = \varphi'(t) \varphi(t)$

Donc le résultat pour $d=1$

Soit $d \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai pour d et montrons pour $d+1$.

Soit $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{d+1} a_k t^k N^k$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k N^k + a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1}$$

$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k N^k}_{\varphi_1(t)} \cdot \text{Constant}$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \exp(\varphi_1(t) + a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1})$$

$$= \exp(\varphi_1(t)) \cdot \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1})$$

$t \mapsto \exp(\varphi_1(t))$ est dérivable (H.R.)

$t \mapsto t^{d+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1})$ " " " " " " " "

$\Rightarrow t \mapsto \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1})$ " " " " " " " "

et $(\pi, N) \mapsto B(\pi, N) = \pi \times N$ est

bilineaire et linéaire

Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) \exp(\varphi_1(t)) \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1})$$

$$+ \exp(\varphi_1(t)) (a_{d+1} (d+1) t^d N^{d+1}) \exp(a_{d+1} t^{d+1} N^{d+1})$$

Puisque $\varphi_1(t) \cdot (d+1)a_{d+1} \in N^{d+1}$ commutatif
 alors $\exp(\varphi_1(t)) \cdot (d+1)a_{d+1} \in N^{d+1}$ "

Donc $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t) + (d+1)a_{d+1} \in N^{d+1}) \exp \varphi(t)$

$$\varphi'(t) = \varphi'(t) \exp(\varphi(t))$$

3) on a $\varphi = \varphi(t) \cdot \varphi(t)$
 on a $t \mapsto \varphi(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $t \mapsto \varphi(t)$ " " "
 $(\pi, N) \mapsto \pi \times N$ bilinéaire (lem. 5.0)

Alors l'app. $t \mapsto \varphi'(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi''(t) = \varphi''(t) \varphi(t) + \varphi'(t) \varphi'(t)$

Partie 5.

1) Soit $\pi \in \pi_n(\mathbb{C})$

on a π et $-\pi$ commutent

$$\text{Alors } \exp(\pi - \pi) = \exp(0_n) = I_n$$

$$\exp(\pi) \cdot \exp(-\pi) = I_n$$

$\Rightarrow \exp(\pi)$ est inversible et
 $(\exp(\pi))^{-1} = \exp(-\pi)$

$\Rightarrow \exp(\pi_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C})$

e) $N \in \pi_n(\mathbb{C})$ nilpotent...
 $A = I_n + N$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot t^k N^k$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k t^k N^k$$

avec $a_0 = 0$ et $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, $1 \leq k \leq n$.

D'après préliminaire, φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} N \cdot k$$

$$(I_n + tN) \varphi'(t) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} N \cdot k$$

$$+ \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^k N \cdot k+1$$

$$= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} t^{k-1} N \cdot k - (-1)^k t^k N \cdot k+1 \right)$$

$$= N - (-1)^n t^n N^{n+1}$$

$$= N$$

$$\Rightarrow (I_n + tN) \varphi'(t) = N$$

$$\varphi(t) = \exp(\varphi(t))$$

i) D'après préliminaire (3)

φ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$

ou

$$\psi'(t) = \varphi'(t) \psi(t)$$

d'après e.a. $(\forall n \in \mathbb{N}) \psi'(t) = n \psi(t)$

$t \mapsto \psi'(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$t \mapsto (\forall n \in \mathbb{N}) \dots$

$(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bilinéaire (du fait)

$\Rightarrow t \mapsto (\forall n \in \mathbb{N}) t^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $(\forall n \in \mathbb{N}) \psi'(t) = n \psi(t) + (\forall n \in \mathbb{N}) \psi''(t)$

Définir $t \mapsto \psi(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$A \mapsto N.A$ est linéaire (du fait)

$\Rightarrow (N\psi(t))' = L(\psi'(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

D'où $N\psi'(t) = L(\psi'(t)) = N\psi(t)$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \psi''(t) = 0_n$$

$$(i) \text{ on a } N \text{ nilp} \Rightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(N) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \text{Sp}_{\mathbb{R}}(\forall n \in \mathbb{N}) = \{1\}$$

$$\Rightarrow 0 \notin \text{Sp}_{\mathbb{R}}(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ est inversible}$$

$$\text{Alors } \psi''(t) = 0_n$$

$$(ii) \text{ on a } \forall t \in \mathbb{R}; \psi''(t) = 0_n$$

$$\Rightarrow \psi'(t) = c_0 = \psi'(0) = N$$

$$\Rightarrow \psi(t) = tN + c_0$$

$$\psi(0) = c_0 = I_n \Rightarrow \psi(t) = I_n + tN; \forall t \in \mathbb{R}$$

$$(c) \text{ on a } A = I_n + N = \psi(1) = \exp(\psi'(1))$$

$$\Rightarrow \exp B = \psi(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\psi'(1))^k}{k!}$$

$$A = \exp B$$

4.) $N \text{ nilp. et } d \in \mathbb{C}^* \text{ tq.}$
 $A = d I_n + N = d(I_n + \frac{1}{d} N)$

or $N \text{ nilp} \Rightarrow \exists \text{ nilp.}$
 d'après $\exists B_1 \in M_n(\mathbb{C}) \text{ tq. } I_n + \frac{1}{d} N = \exp(B_1)$

$d = |d| e^{i\theta} = e^{\ln|d| + i\theta} = e^p$ avec $p = \ln|d| + i\theta$

$\Rightarrow A = e^p I_n \exp(B_1) = \exp(p \cdot I_n) \cdot \exp(B_1)$

$A = \exp(p I_n + B_1) \quad \checkmark \text{ commutent.}$

$\exists B = p I_n + B_1 \Rightarrow A = \exp B.$

5.) $A \in GL_n(\mathbb{C})$; $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tq.}$
 $A = P^{-1} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ & \ddots \\ & & A_k \end{pmatrix} P$

avec $A_j = \lambda_j I_{n_j} + N_j$

soit $1 \leq j \leq k$; d'après u) $\exists B_j \in \pi_{ij}(\mathbb{C})$

$$A_j = \exp(B_j)$$

$$\Rightarrow A = p^{-1} \left(\begin{array}{c} \exp(B_1) \\ \vdots \\ \exp(B_k) \end{array} \middle| p \right)$$

$$A = p^{-1} \left(\sum_{i=1}^n B_i \right)$$

$$\begin{aligned} &= p^{-1} \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{array} \middle| p \right) \\ &= p^{-1} \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{array} \middle| p \right) \\ &= p^{-1} \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{array} \middle| p \right) \\ &= p^{-1} \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{array} \middle| p \right) \end{aligned}$$

$$= \exp(p^{-1} (B_1 \dots B_k | p)) \text{ (d'après u)}$$

$$\Rightarrow A = \exp(B) \text{ avec } \dots$$

$$B = p^{-1} (B_1 \dots B_k | p)$$

Rappel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{ijn}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ijn} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{ijn}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_{ijk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ijk}$$

6) D'après 4) $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{F})) \subset \text{GL}_n(\mathbb{F})$.

D'après 1) $\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{F}), \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tq.

$$A = \exp(B) \Rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F}) \subset \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{F}))$$

$$\text{Donc } \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{F})) = \text{GL}_n(\mathbb{F})$$

Exercice 7.

2) $AB = BA \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: BA^k = A^k B$

Req. $B \cdot \exp A = \exp(A) \cdot B$

On a: $B \cdot \exp(A) = B \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

$= B \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$

$= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n\right)$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} f(S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(B \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right)$

$= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) \cdot B$

$\varphi: \pi \mapsto \pi B$
continue

on déduit

$(\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A)$

s/à sub $f: \mathbb{R} \rightarrow \pi_p(\mathbb{R})$

$t \mapsto f(t) = \exp(tA)$

Req f est C^∞ sur $\mathbb{R}$

et $f^{(k)}(t) = A^k \exp(tA); \forall t \in \mathbb{R}$

On a $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$

avec $f_n(t) = \frac{(tA)^n}{n!} = t^n \cdot \frac{A^n}{n!}$

$\forall n \in \mathbb{N}: t \mapsto t^n \frac{A^n}{n!}$
et $f_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k} \frac{A^n}{n!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

$$\sum_{n \geq 0} p_n^{(k)}(t) = \sum_{n \geq k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} A^n = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^{n+k}$$

soit $\sum [a, b] \subset \mathbb{R}$.

$$\left\| \frac{t^n}{n!} A^{n+k} \right\| \leq \frac{|t|^n}{n!} \|A\|^{n+k} \leq \frac{C^n}{n!} \|A\|^{n+k} \text{ avec } C = \max(|a|, |b|)$$

$$\sup_{t \in [a, b]} \left\| \frac{t^n}{n!} A^{n+k} \right\| \leq \frac{C^n}{n!} \|A\|^{n+k}$$

$$\text{Or } \sum_{n \geq 0} \frac{C^n}{n!} \|A\|^n \cdot \|A\|^k \text{ converge. } C \|A\|$$

$$\text{Alors } \sum_{n \geq 0} \sup_{t \in [a, b]} \left\| \frac{t^n}{n!} A^{n+k} \right\| \cdot C \Rightarrow \sum_{n \geq 0} f_n(k)$$

Alors par la sommation sur $\mathbb{R}$ et

$$f(k) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^{n+k}$$

$$= A^k \exp(A)$$

convergence

$C \Rightarrow C_k$
next part: reg $C [a, b]$

7) $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
 $t \mapsto \varphi(t) = \exp(tA) \cdot \exp(-tA)$

a) $t \mapsto \exp(tA)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$
 $t \mapsto \exp(-tA)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$

$(\mathcal{M}_n, \cdot) \xleftarrow{B} \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ bilinéaire
 $\Rightarrow \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\varphi'(t) = A \exp(tA) \cdot \exp(-tA) + \exp(tA) \cdot (-A) \cdot \exp(-tA)$
 $\Rightarrow \varphi'(t) = 0_n$

b) $\varphi'(t) = 0_n, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(t) = c_b = \varphi(0) = I_n$
 $\Rightarrow \varphi(t) = I_n \Rightarrow (\exp(A))^{-1} = \exp(A)$

8) a) $\varphi(t) = \exp(t(A+B)) \exp(-tA) \exp(-tB)$
 $t \mapsto \exp(t(A+B))$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$
 $t \mapsto \exp(-tA)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$
 $t \mapsto \exp(-tB)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$
 B bilinéaire

$\Rightarrow \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\varphi'(t) = (A+B) \exp(t(A+B)) \exp(-tA) \exp(-tB) + \exp(t(A+B)) \cdot (-A) \exp(-tA) \exp(-tB) + \exp(t(A+B)) \cdot (-B) \exp(-tA) \exp(-tB)$

b) $AB = BA \Rightarrow A$ et B commutent
 $\Rightarrow \varphi'(t) = 0_n$
 $\Rightarrow \varphi(t) = c_b = \varphi(0) = I_n$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \exp(A+B) \cdot \exp(-A) \exp(-B) = I_n$$

$$\Rightarrow \exp(A+B) = (\exp(-B))^{-1} (\exp(-A))^{-1}$$

$$= \exp(B) \exp(A)$$

$$= \exp(A) \exp(B)$$

g.)

$$y' = ay \Rightarrow y(t) = y_0 e^{at}$$

$$x'(t) = Ax(t)$$

$$x(t) = e^{tA} \cdot x_0$$