

Rappel: "Fonction vectorielle"

$$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E \quad (E \text{ e.v.n.} \\ \dim E = n)$$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

$$\forall t \in I, f(t) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f_k(t)}_{e_k}$$

f est dérivable en $a \in I$.

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe dans E .

$$\text{noté } f'(a) \\ \text{II} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\text{III} \quad f(a+h) = f(a) + h f'(a) + o(h)$$

* f est dérivable sur $I \Leftrightarrow$
 $\forall k \in \{1, \dots, n\}: f_k$ est dérivable sur I
et $f'(t) = \sum_{k=1}^n f'_k(t) e_k$.

App 1.

Soit $A(t) = (a_{ij}(t))$; $t \in I$
 $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$t \mapsto A(t)$ est dérivable sur I
 $\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\}: t \mapsto a_{ij}(t)$ est dérivable sur I et

$$A'(t) = (a'_{ij}(t))_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$$

App Soit $A \in \Pi_n(K)$

et $\varphi: I \rightarrow K$.

$f: I \rightarrow \Pi_n(K)$
 $t \mapsto \varphi(t) \cdot A$

f est dérivable sur $I \Leftrightarrow \varphi$ est dérivable sur I
et $f'(t) = \varphi'(t) \cdot A, \forall t \in I$

cas soit $A = (a_{ij})$

ona. $f(t) = \varphi(t) \cdot A$

$\forall i, j, t \mapsto \varphi(t) a_{ij}$ est dérivable sur I
Alors f est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\varphi'(t) a_{ij}) = \varphi'(t) (a_{ij}) \\ &= \varphi'(t) \cdot A \end{aligned}$$

Thé. Soit $f: I \rightarrow E$ ($\frac{d \cdot E \leq \infty}{I \cdot F \leq \infty}$)
 et $L: E \rightarrow F$ linéaire
 Si $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \\ L \text{ linéaire } (L: E \rightarrow F) \end{array} \right.$

Alors $L \circ f: I \rightarrow F$ est dérivable
 et $(L \circ f)'(t) = L(f'(t))$
 * Si $f \in C^n$ sur I , alors $L \circ f \in C^n$ sur I
 et $(L \circ f)^{(k)}(t) = L(f^{(k)}(t))$
Effet Soit $a \in I$.

$$\frac{L(f(t)) - L(f(a))}{t-a} \stackrel{L \text{ linéaire}}{=} L\left(\frac{f(t) - f(a)}{t-a}\right)$$

f est dérivable en $a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t-a} = f'(a)$

L linéaire ($L: E \rightarrow F$)
 $\Rightarrow L$ continue, donc
 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{L(f(t)) - L(f(a))}{t-a} = L\left(\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t-a}\right) = L(f'(a))$

App Soit $X: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 $t \mapsto X(t)$
 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Si X est dérivable sur I , alors
 l'app. $f: t \mapsto \begin{pmatrix} I \\ X(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dérivable sur I
 et $f'(t) = A X'(t)$

cas Soit $L: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 est linéaire $Y \mapsto A \cdot Y$
 $f(t) = L(X(t))$ et $L: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
 X est dérivable $\Rightarrow$

f est dérivable et $f'(t) = L(x'(t)) = AX'(t)$

App 2: $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien

Soit $\varphi: I \rightarrow E$ dérivable sur I .
 $t \mapsto \varphi(t)$.

Alors $f: t \mapsto \langle \varphi(t), b \rangle$ avec $b \in E$
est dérivable sur I et $f'(t) = \langle \varphi'(t), b \rangle$.

Car $L: E \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
 $x \mapsto \langle x, b \rangle$
 $L: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = L(\varphi(t)) \Rightarrow f'(t) = L(\varphi'(t)) = \langle \varphi'(t), b \rangle$$

Th 2: $f: I \rightarrow E$; $g: I \rightarrow F$
 et $B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire

on pose $B(f, g): I \rightarrow G$.

si f et g sont dérivables en a ,
 Alors $B(f, g)$ est " " et.

$$(B(f, g))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t)).$$

En effet. Soit $a \in I$.

$$\frac{B(f, g)(t) - B(f, g)(a)}{t - a} =$$

$$\frac{B(f(t), g(t)) - B(f(a), g(a))}{t - a} =$$

$$= \frac{B(f(t) - f(a), g(a)) + B(f(a), g(t) - g(a))}{t - a}$$

$$= B\left(\frac{f(t) - f(a)}{t - a}, g(a)\right) + \frac{B(f(a), g(t) - g(a))}{t - a}$$

$$= B\left(\frac{f(t) - f(a)}{t - a}, g(a)\right) + B\left(f(a), \frac{g(t) - g(a)}{t - a}\right)$$

or f est dérivable en a .

g " " " " $\Rightarrow g$ continue en a .

$$\lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \cdot g(a) \right) = \left(\frac{f'(a)}{1} \right) \cdot g(a)$$

B bilinéaire
 donc B est l. p.p.o. $\Rightarrow$ continue.

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow a} B\left(\frac{f(t) - f(a)}{t - a}, g(t)\right) = B(f'(a), g(a))$$

App 1. Soit $A: t \mapsto A(t) \in \Pi_n(K)$
 $C: t \mapsto C(t) \in \Pi_n(K)$.

Si les app. A et C sont dérivables, sur I

Alors l'app. $t \mapsto A(t) \cdot C(t)$ est " "

et $\forall t \in I$, $f'(t) = A'(t) \cdot C(t) + A(t) \cdot C'(t)$.

Cor $f(t) = B(A(t), C(t))$ avec

$B: \Pi_n(K) \times \Pi_n(K) \rightarrow \Pi_n(K)$
 $(P, N) \mapsto P \cdot N$

est bilinéaire et $\Pi_n(K) \subset \mathcal{A}$
 A et C sont dérivables $\Rightarrow$
 f est dérivable et $f'(t) = B(A'(t), C(t)) + B(A(t), C'(t))$

App²: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien

Soit $U: I \rightarrow E$
 $t \mapsto U(t)$ (resp $U'(t)$)

Si U et U' sont dérivables sur I
 Alors $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

$f: t \mapsto f(t) = \langle U(t), U'(t) \rangle$
 est dérivable et

$$f'(t) = \langle U'(t), U'(t) \rangle + \langle U(t), U''(t) \rangle$$

Th³ "Formule de Leibniz"

Si f et g sont des courbes C^n sur I
 Alors $B(f, g)$ est C^n sur I

et $(B(f, g))^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$

Th.3 Soit $\varphi: I \rightarrow \underline{\mathbb{K}}$
 et $f: I \rightarrow E$

Si f et φ sont dérivables sur I
 Alors $\varphi \cdot f$ est dérivable sur I
 et $(\varphi \cdot f)'(t) = \varphi'(t) f(t) + \varphi(t) f'(t)$
 $\forall t \in I$

Co. $B: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$ est bilinéaire
 $(d, x) \mapsto d \cdot x$

Th⁴. $\varphi: I \rightarrow J \subset \mathbb{R}$ et $f: J \rightarrow E$
 Si φ et f sont dérivables sur I
 Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I

$(f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) f'(\varphi(t))$

Exercice 1

1) $f: I \rightarrow E$; $g: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto g(t) = \|f(t)\|^2$

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } I \\ \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est bilinéaire. (L.E. } \infty) \end{array} \right.$

Alors g est dérivable sur I .

et $g'(t) = \langle f'(t), f(t) \rangle + \langle f(t), f'(t) \rangle$
 $= 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$

2) $h: I \rightarrow \mathbb{R}$; $f(t) \neq 0, \forall t \in I$
 $t \mapsto \|f(t)\| = \sqrt{g(t)}$

$t \mapsto g(t)$ est dérivable sur I d'après 1)
 $t \mapsto \sqrt{x}$ " " sur $]0, \infty[$

$\Rightarrow h$ est dérivable sur I
et $h'(t) = \frac{g'(t)}{2\sqrt{g(t)}}$

$h'(t) = \frac{\langle f'(t), f(t) \rangle}{\|f(t)\|}, \forall t \in I$

Exercice 2

$A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
 $t \mapsto A(t) = (a_{ij}(t))$

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \det(A(t))$

$$f(t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}(t)$$

$f(t) = \det(A(t))$ est polynôme à coefficients de $A(t)$.

or A est dérivable $\Leftrightarrow \forall i, j, t \mapsto a_{ij}(t)$ est dérivable sur I
 Donc f est dérivable sur I

e) $n=2$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \overbrace{a_{11}(t)}^{C_1(t)} & \overbrace{a_{12}(t)}^{C_2(t)} \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$\det(A(t)) = a_{11}(t)a_{22}(t) - a_{21}(t)a_{12}(t)$$

$$\Rightarrow (\det A(t))' = a_{11}'(t)a_{22}(t) + a_{11}(t)a_{22}'(t) - a_{21}'(t)a_{12}(t) - a_{21}(t)a_{12}'(t)$$

Autrement

$\det$ est bilinéaire / aux vecteurs colonnes

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\det A(t))' &= \det(C_1'(t), C_2(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t)) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}'(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}'(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}'(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}'(t) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 4.

$$U \in \mathcal{L}(E); \quad \langle U(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle, \forall x, y \in E.$$

$$F \neq \{0_E\}; \quad F \text{ r.e. o. d. } E.$$

1) Soit $g: E \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto g(x) = \langle U(x), x \rangle$$

Soit $f: E \rightarrow E \times E$.

$$x \mapsto (U(x), x) = (U, \text{id}_E)(x)$$

U et id_E sont linéaires

$\Rightarrow$ continues

$\Rightarrow f$ est continue.

et on a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire et de E so

$\Rightarrow$ continu, d'où

$g = \langle \cdot, \cdot \rangle \circ f$ est continu.

2) Soit $K = F \cap S(0,1)$

$$F \text{ r.e. o. d. } E \Rightarrow F \text{ fermé}$$

$S(0,1)$ est un fermé et borné $\Rightarrow$

$S(0,1) = \text{compact}$.

or $K = F \cap S(0,1) = \text{fermé} \subset S(0,1)$

$\Rightarrow K$ compact.

De plus $F \neq \{0_E\} \Rightarrow \exists x \neq 0_E, x \in F$.

$$\Rightarrow y = \frac{x}{\|x\|} \in S(0,1).$$

$$\Rightarrow y \in K \Rightarrow K \neq \emptyset$$

On a g continue et a valeurs dans $\mathbb{R}$.
 K compact non vide.

$\Rightarrow g$ est bornée et atteint ses bornes sur K .

$\Rightarrow \exists x_0 \in K$ tel $\sup_{x \in K} g(x) = g(x_0)$

$$\Leftrightarrow \sup_{x \in E, \|x\|=1} \langle U(x), x \rangle = \langle U(x_0), x_0 \rangle$$

* $y \in E, \|y\|=1, \quad \begin{cases} \gamma(t) = x_0 \cos t + y \sin t \\ \varphi(t) = \langle U(\gamma(t)), \gamma(t) \rangle \end{cases} : t \in \mathbb{R}$

3) $\begin{cases} t \mapsto \cos t \text{ et } t \mapsto \sin t \text{ sont des constantes } C? \\ x_0 \text{ et } y \text{ sont des vecteurs constants} \end{cases}$

$\Rightarrow \gamma$ est ch
 et on a U est linéaire et de $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow t \mapsto U(\gamma(t))$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$

L'app. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire ($\phi: E \rightarrow$

$\Rightarrow \varphi$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \langle \psi(\gamma'(t)); \gamma(t) \rangle + \langle \psi(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = 2 \langle \gamma'(t), \psi(\gamma(t)) \rangle, \forall t \in \mathbb{R}.$$

4) Requ.

$$\text{Si } \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\langle x_0, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x_0 \cos t, y \sin t \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|\gamma(t)\|^2 = \|x_0 \cos t\|^2 + \|y \sin t\|^2$$

$$\Rightarrow \|\gamma(t)\|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

* on a $\forall t \in \mathbb{R}, \|\gamma(t)\| = 1 \Rightarrow \gamma(t) \in S(0,1)$

et $\gamma(t) \in F$

$$\Rightarrow \gamma(t) \in F \cap S(0,1) = K.$$

$$\Rightarrow \langle \psi(\gamma(t), \gamma(t)) \rangle \leq \sup_{x \in K} \langle \psi(x), x \rangle$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) \leq \langle \psi(x_0), x_0 \rangle = \varphi(0).$$

$\Rightarrow \varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) \leq \varphi(0) \Rightarrow \varphi'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(0) = 2 \langle \gamma'(0), \psi(\gamma(0)) \rangle = 2 \langle \gamma'(0), y \rangle = 0$$