

TABLE DES MATIÈRES

Tous les espaces vectoriels de ce chapitre, souvent notés E , sont des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

IV SUITES TOTALES

1 Définition et exemples

Définition : Suite totale

On dit que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **totale** dans l'espace préhilbertien réel $(E, (\cdot|\cdot))$ lorsque $\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans E , c'est-à-dire $\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}} = E$.

Autrement dit, lorsque, pour tout $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_d$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\left\| x - \sum_{k=0}^d \alpha_k e_k \right\| \leq \varepsilon$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée à $(\cdot|\cdot)$.

Exemple : fondamental

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

On note w est une fonction continue strictement positive intégrable sur $[a, b]$. Munissons $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ du produit scalaire

$$(f|g) = \int_a^b w(t) f(t) g(t) dt$$

Alors la famille $(t \mapsto t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale. Plus généralement, toute famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynômes vérifiant, pour tout n , $\deg(e_n) = n$, est totale.

En effet, la clé est ici le théorème de Weierstrass. On commence par comparer la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire et la norme N_∞ de la convergence uniforme : notant $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$\forall f \in E \quad \|f\| \leq k N_\infty$$

avec $k = \sqrt{\int_a^b w}$. Il y a par théorème de Weierstrass une suite (P_n) d'éléments de $\text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}})$ qui converge vers f pour N_∞ . A fortiori il y a convergence pour $\|\cdot\|$.

2 Caractérisation par les projections orthogonales

Propriété

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace préhilbertien réel $(E, (\cdot|\cdot))$.

Pour tout n , p_n désigne la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$.

Alors, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale si et seulement si pour tout $x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Démonstration

Le sens réciproque est immédiat, par définition d'une suite totale.

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale, $x \in E$, $\varepsilon > 0$.

On a $y \in \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\|y - x\| \leq \varepsilon$.

Soit d tel que $y \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_d)$.

Si $n \geq d$, $y \in \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ et $d(x, \text{Vect}(e_0, \dots, e_n)) = \|x - p_n(x)\| \leq \|x - y\| \leq \varepsilon$, ce qui permet de conclure. $\square$

3 Complément

Exercice : Égalité de Bessel-Parseval

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormale dans l'espace préhilbertien réel $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, alors,

$$\forall x \in E \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (e_n, x)^2 \leq \|x\|^2$$

et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale si et seulement si

$$\forall x \in E \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (e_n, x)^2 = \|x\|^2$$

L'inégalité a été vue (inégalité de Bessel). L'équivalence vient de la simple remarque suivante (voir chapitre sur la projection orthogonale sur un sev de dimension finie) :

$$\|x - p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^n (e_k, x)^2$$

et de la proposition précédente.

Exercice

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale, si $F = \text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $F^\perp = \{0_E\}$

Il suffit de dire que, si $x \in F^\perp$, alors $p_n(x) = 0_E$ pour tout x . Or la suite $(p_n(x))$ converge vers x ...

V MATRICE D'UN ENDOMORPHISME DANS UNE BASE ORTHONORMALE : EXPRESSION À L'AIDE DU PRODUIT SCALAIRE

Propriété

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Les coefficients de la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sont donnés par

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2 \quad a_{i,j} = (e_i | u(e_j))$$

VI ISOMÉTRIES VECTORIELLES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

1 Définition

Définition : Isométrie vectorielle

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

On appelle **isométrie vectorielle** (ou **automorphisme orthogonal**) de E tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

Propriété

Soit E un espace euclidien. Les isométries vectorielles de E sont des automorphismes. Autrement dit, $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$.

Démonstration

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ et $x \in \text{Ker } u$, alors $\|x\| = \|u(x)\| = 0$, donc $x = 0_E$. u est ainsi un endomorphisme de E injectif avec E de dimension finie, donc bijectif. $\square$

Remarques

- R1 – En particulier, pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(u(x), u(y)) = d(x, y)$: u conserve les distances.
- R2 – Pour être tout-à-fait précis, il faudrait noter $\mathcal{O}(E, | \cdot |)$ cet ensemble, car les isométries ne sont pas les mêmes suivant le produit scalaire que l'on choisit.
- R3 – Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal, alors qu'une projection orthogonale non triviale ne l'est pas (si $F \neq E$ et $x \in F^\perp \setminus \{0\}$, $\|p_F(x)\| = 0 \neq \|x\|$ (p_F n'est pas injectif). Attention donc au vocabulaire !

2 Caractérisations

Propriété

Soient $(E, | \cdot |)$ un espace euclidien, $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) u est une isométrie vectorielle,
- (ii) u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E, (u(x)|u(y)) = (x|y)$,
- (iii) u transforme TOUTE b.o.n. en une b.o.n.
- (iv) u transforme UNE b.o.n. en une b.o.n.

Démonstration

On a déjà facilement $(ii) \Rightarrow (i)$ et $(iii) \Rightarrow (iv)$.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Si u est une isométrie vectorielle, alors pour tout vecteurs x et y de E ,

$$\begin{aligned} (u(x)|u(y)) &= \frac{1}{4} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \quad (\text{car } u \text{ conserve la norme}) \\ &= (x|y) \end{aligned}$$

- $(ii) \Rightarrow (iii)$: On suppose que u conserve le produit scalaire.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Alors $\forall i, j \in [1, n], (u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$, donc $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille orthonormale de E , et est constituée de n vecteurs (non nuls, car normés) en dimension n : c'est une base orthonormale de E .

- $(iv) \Rightarrow (i)$: On suppose que u transforme une b.o.n. $(e_1, \dots, e_n)$ en une b.o.n. de E . Soit $x \in E$, alors $x = \sum_{i=1}^n (e_i|x) e_i$ et

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2.$$

L'orthonormalité de la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ nous donne de plus

$$\begin{aligned} \|u(x)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n (e_i|x) u(e_i) \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2 \|u(e_i)\|^2 \quad (\text{d'après le théorème de Pythagore}) \\ &= \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

u est donc bien une isométrie vectorielle. $\square$

R1 – Un exercice classique consiste à montrer qu'une application qui conserve la norme et telle que $u(0_E) = 0_E$ est automatiquement linéaire (voir TD).

R2 – Si u est une orthogonal, alors $\forall x, y \in E, (u(x)|y) = (x|u^{-1}(y))$.

Propriété

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E .

$$u(F^\perp) = (u(F))^\perp.$$

Démonstration

Si $x \in u(F^\perp)$, il existe $y \in F^\perp$ tel que $x = u(y)$.

Alors, pour tout $z \in F, (x|u(z)) = (u(y)|u(z)) = (y|z) = 0$ car $y \in F^\perp$.

Donc $u(F^\perp) \subset u(F)^\perp$, et on obtient l'égalité en regardant les dimension et en utilisant la bijectivité de u :

$$\dim u(F^\perp) = \dim F^\perp = \dim E - \dim F = \dim E - \dim u(F) = \dim u(F)^\perp. \quad \square$$

Propriété

Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E .

Si F est stable par u , alors $F^\perp$ l'est aussi.

Démonstration

$u(F) \subset F$ donc $F^\perp \subset u(F)^\perp = u(F^\perp)$, or ils ont même dimension par bijectivité de u , donc $u(F^\perp) = F^\perp$. $\square$

3 Structure

Propriété

L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries (automorphismes orthogonaux) de E est un groupe pour la loi $\circ$, appelé **groupe orthogonal** de E .

Démonstration

Comme $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$, on va en fait montrer que $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

• Comme on l'a déjà vu, $id_E \in \mathcal{O}(E)$.

• Soit u et v deux isométries vectorielles. Montrons que $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

$u \circ v^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$ et si $x \in E, \|u \circ v^{-1}(x)\| = \|v^{-1}(x)\|$ car u est une isométrie vectorielle.

Mais comme v est aussi une isométrie, $\|x\| = \|v(v^{-1}(x))\| = \|v^{-1}(x)\|$.

Finalement, pour tout $x \in E, \|u \circ v^{-1}(x)\| = \|x\|$, et $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}(E)$. $\square$

VII MATRICES ORTHOGONALES

1 Définition

Définition : Matrice orthogonale

Une matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est dite **orthogonale** si et seulement si $A^T A = I_n$.

On note $\mathcal{O}(n)$ ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Caractérisations

Propriété

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $A \in \mathcal{O}(n)$
- (ii) A est inversible et $A^{-1} = A^T$
- (iii) $AA^T = I_n$
- (iv) $A^T \in \mathcal{O}(n)$
- (v) Les colonnes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel
- (vi) Les lignes de A forment une famille orthonormale pour le produit scalaire usuel

Démonstration

- (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) : Facile.
- (i) $\Leftrightarrow$ (v) : pour tout (i, j) , $(A^T A)_{i,j} = C_i^T C_j = (C_i | C_j)$ donne immédiatement l'équivalence.
- (iv) $\Leftrightarrow$ (vi) s'obtient en transposant.

Remarque

⚠ La matrice est ortho**G**onale si et seulement si ses colonnes sont ortho**N**ormales.

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

$$(C_1 | C_2) = \sqrt{2}/2 \sqrt{3}/3 - \sqrt{2}/2 \sqrt{3}/3 = 0.$$

$$(C_2 | C_3) = -\sqrt{3}/3 \sqrt{6}/6 + \sqrt{3}/3 \sqrt{6}/3 - \sqrt{3}/3 \sqrt{6}/6 = 0.$$

$$(C_1 | C_3) = -\sqrt{2}/2 \sqrt{6}/6 + \sqrt{2}/2 \sqrt{6}/3 = 0.$$

$$\|C_1\|^2 = (\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2 + 1/2 = 1.$$

$$\|C_2\|^2 = (\sqrt{3}/3)^2 + (\sqrt{3}/3)^2 + (\sqrt{6}/3)^2 = 1/3 + 1/3 + 2/3 = 1.$$

$$\|C_3\|^2 = (\sqrt{6}/6)^2 + (\sqrt{6}/3)^2 + (\sqrt{6}/6)^2 = 1/6 + 4/6 + 1/6 = 1.$$

Donc $M \in \mathcal{O}(3)$.

Exercice

$\mathcal{O}(n)$ est compact.

3 Lien avec les isométries

Propriété

Soit E un espace euclidien. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u \in \mathcal{O}(E)$
- (ii) Dans TOUTE b.o.n., la matrice de u est orthogonale
- (iii) Il existe UNE b.o.n. dans laquelle la matrice de u est orthogonale

Démonstration

Rappelons que si A est la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors pour tout (i, j) , $a_{i,j} = (e_i | u(e_j))$.

- (i) $\Rightarrow$ (ii) : Si $u \in \mathcal{O}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormale de E , $u(\mathcal{B})$ est encore une base orthonormale et pour tout (i, j) ,

$$(A^T)_{i,j} = a_{j,i} = (e_j | u(e_i)) = (u^{-1}(e_j) | e_i) = (A^{-1})_{i,j}$$

Donc $A^{-1} = A^T$: A est orthogonale.

Autre justification possible : A est la matrice de passage de la b.o.n. $\mathcal{B}$ à la b.o.n. $u(\mathcal{B})$.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) : évident.
- (iii) $\Rightarrow$ (i) : S'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice A de u est orthogonale, alors

$$\forall x \in E, \|u(x)\|^2 = X^T A^T A X = X^T X = \|x\|^2$$

donc u est une isométrie. $\square$

Remarque

- Si A est la matrice dans une b.o.n. de $u \in \mathcal{O}(E)$, alors la matrice de u^{-1} dans cette même base est $A^{-1} = A^T$.
- Être représenté par une matrice orthogonale en base orthogonale seulement ne suffit pas : dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique (e_1, e_2) , l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, 2e_2)$ n'est pas orthogonal (il ne conserve pas la norme) bien que A soit une matrice orthogonale.

4 Structure

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{O}(n), \times)$ est un groupe appelé **groupe orthogonal d'ordre n** . C'est même un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

On montre facilement que $I_n \in \mathcal{O}(n)$, et si $M, N \in \mathcal{O}(n)$, $MN^{-1} = MNT \in \mathcal{O}(n)$ car

$$(MNT)^T (MNT) = (N^T)^T M^T M N^T = N(M^T M)N^T = NI_n N^T = NN^T = I_n.$$

On peut aussi voir $\mathcal{O}(n)$ comme l'image du groupe $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ par le morphisme de groupe $u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. $\square$

Remarque

On a un isomorphisme de groupes, si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de l'espace euclidien E de dimension n

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}(E), \times) & \longrightarrow & (\mathcal{O}(n), \times) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

5 Matrices de passage orthogonales et changement de base orthonormale

Propriété

Soient, dans un espace euclidien E , $\mathcal{B}$ une b.o.n., $\mathcal{B}'$ une base de E et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. $\mathcal{B}'$ est une b.o.n. de E si et seulement si P est orthogonale.

Démonstration

Soit u l'endomorphisme de E représenté par la matrice P dans la base $\mathcal{B}$.

Alors $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$: si $\mathcal{B}'$ est un b.o.n., on a déjà vu que $P^{-1} = P^T$, et on le retrouve en remarquant que u transforme une b.o.n. en b.o.n. donc est orthogonal donc P est une matrice orthogonale, et réciproquement, si P est orthogonale, u l'est et l'image $\mathcal{B}'$ de la b.o.n. $\mathcal{B}$ par u est une b.o.n. $\square$

Remarque

Rappel : Changement de b.o.n. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux b.o.n. de E euclidien, $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^T \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P$$

6 Isométries positives et négatives

Propriété

Les applications et les matrices orthogonales sont de déterminant ± 1 . La réciproque est fautive.

Démonstration

$$\det(A^T A) = 1.$$

$$\text{Contre exemple : } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition : Groupe spécial orthogonal

On appelle **groupe spécial orthogonal d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$** , noté $\mathcal{SO}(n)$ ou $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant positif (+1), dites **matrices orthogonales positives**. Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(n)$.

Les matrices orthogonales de déterminant négatif sont appelées **matrices orthogonales négatives**. L'ensemble est $\mathcal{O}^-(n)$.

Définition : Rotations

Si E espace euclidien, on appelle **groupe spécial orthogonal de E** , noté $\mathcal{SO}(E)$ le groupe des isométries de E de déterminant positif (+1), appelées **isométries positives** ou **rotations de E** . Il est parfois noté $\mathcal{O}^+(E)$. On parle aussi d'**isométries directes**.

Les isométries de déterminant négatif sont appelées **isométries négatives** ou **indirectes**.

Démonstration : groupe

noyau du déterminant.

Remarque

Attention, il ne suffit pas d'être de déterminant 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice de rotation.

Propriété

Soit E euclidien orienté, $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalentes :

- (i) u isométrie directe (rotation) de E .
- (ii) u transforme tout bond en bond.
- (iii) u transforme un bond en bond.

Démonstration

- (i) $\Rightarrow$ (ii) : u transforme un bond $\mathcal{B}$ en bon car orthogonal. Puis $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) > 0$.
- (iii) $\Rightarrow$ (i) : u orthogonale et $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) > 0$. $\square$

Propriété

Toute réflexion d'un espace euclidien orienté est une isométrie indirecte.

Propriété : Description de $\mathcal{O}(2)$

$\mathcal{O}(2) = \mathcal{SO}(2) \sqcup \mathcal{O}^-(2)$ avec

$$\mathcal{SO}(2) = \left\{ R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}^-(2) = \left\{ S_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque

Expression complexe, en passant par la base canonique $(1, i)$: $r_{\theta}(z) = e^{i\theta} z$ et $s_{\theta}(z) = e^{i\theta} \bar{z}$.

Propriété

Le groupe $(\mathcal{SO}(2), \times)$ est commutatif.

Remarque

C'est faux en dimension quelconque.

II ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

1 Définition

Définition

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique lorsque

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) | y) = (x | u(y))$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, noté $\mathcal{S}(E)$.

Exercice

$\mathcal{S}(E)$ a une structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Remarque

Ne pas confondre endomorphisme symétrique et symétrie!

2 Caractérisation matricielle en base orthonormale

Propriété

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de l'espace euclidien E , $u \in \mathcal{L}(E)$.
 u est symétrique si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Démonstration

Si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, pour tout (i, j) , $a_{i,j} = (e_i | u(e_j))$.

Remarque

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on peut montrer qu'il existe un unique endomorphisme v tel que pour tout x, y , $(u(x) | y) = (x | v(y))$, appelé adjoint de u .
On démontre alors comme ci-dessus, que la matrice de v en base orthonormale est la transposée de celle de u : c'est l'interprétation géométrique de la transposition de matrices.
Ainsi, pour un endomorphisme symétrique, $v = u$ et pour un endomorphisme orthogonal (isométrie), $v = u^{-1}$.

3 Cas des projections

Propriété

Soit p un projecteur ($p \circ p = p$).
Alors p est un projecteur orthogonal (i.e. $\text{Ker } p \perp \text{Im } p$) si et seulement s'il est symétrique.

Remarque

P la matrice de p en base orthonormale. Alors p projection orthogonale si et seulement si $P^2 = P$ et $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

Si p est orthogonal, $x, y \in E$, alors $(p(x) | y) = (p(x) | p(y)) + ((p(x) | y) - p(y)) = (p(x) | p(y)) = (p(y) | x) = (x | p(y))$ par symétrie des rôles de x et y .

Si p est un projecteur symétrique, $x \in \text{Ker } p$ et $y = p(x') \in \text{Im } p$, $(x | y) = (x | p(x')) = (p(x) | x') = (0_E | x') = 0$ donc p projecteur orthogonal. $\square$

4 Sous-espaces stables

Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et F stable par u , alors $F^\perp$ l'est.

Démonstration

Si $x \in F^\perp$ et $y \in F$, $(u(x)|y) = (x|u(y)) = 0$ donc $u(x) \in F^\perp$. □

5 Réduction des endomorphismes et des matrices symétriques : théorème spectral

E désigne un espace euclidien. Trois énoncés équivalents du théorème spectral :

Théorème : spectral

Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp } u} E_\lambda(u)$ où les $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ sont les sous-espaces propres de u .

Théorème : spectral

Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormale : si $u \in \mathcal{S}(E)$, il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u .

Théorème : spectral

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathcal{O}(n)$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^T = PDP^{-1}.$$

Remarque

P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormale de vecteurs propres de endomorphisme canoniquement associé à A .

Démonstration

Remarquons déjà que le fait que des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes soient orthogonaux va être une conséquence de l'orthodiagonalisabilité, mais peut se voir aussi directement : si $\lambda, \mu \in \text{Sp } u$ avec $\lambda \neq \mu$, $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Alors $\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|\mu y) = \mu(x|y)$ et comme $\lambda \neq \mu$, $(x|y) = 0$.

Passons maintenant aux choses sérieuses.

Lemme

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors $\text{Sp } u \neq \emptyset$.

Démonstration

On sait que u admet une valeur propre complexe λ . Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la matrice de u dans cette base.

On a donc $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$.

On remarque astucieusement que $X^T \bar{X} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$.

On calcule ensuite $\lambda X^T \bar{X} = (\lambda X)^T \bar{X} = A^T X^T \bar{X} = X^T A^T \bar{X} = X^T A \bar{X} = X^T \bar{A} X = \bar{\lambda} X^T \bar{X}$ et donc $\lambda = \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$. □

Et on démontre le théorème en raisonnant par récurrence sur la dimension de E .
Si E est de dimension 1, il n'y a rien à faire.

Soit $n \geq 1$. Supposons que tout endomorphisme symétrique d'un espace de dimension n soit orthodiagonalisable. Soit E un espace de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{S}(E)$.

On sait que u admet une valeur propre et donc un vecteur propre $x \in E \setminus \{0_E\}$. Soit $D = \text{Vect } x$.

Alors D est stable par u et donc $D^\perp$ l'est aussi d'après une propriété vu précédemment.

Soit v l'endomorphisme induit par u sur $D^\perp$, espace euclidien de dimension n . La symétrie de u se transmet à v par restriction, donc v est orthodiagonalisable par hypothèse de récurrence. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de v . Ce sont aussi des vecteurs propres de u .

Enfin, $(e_1, \dots, e_n, \frac{1}{\|x\|} x)$ est une base adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^\perp$, orthonormale, formée de vecteurs propres de u , ce qui établit la récurrence. $\square$

Remarque

C'est faux pour une matrice complexe : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$ symétrique complexe non diagonalisable.

C'est vrai dans $\mathbb{C}$ pour des matrices telles que $A^T = \bar{A}$ mais c'est hors-programme.

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que A est diagonalisable et l'orthodiagonaliser.

RÉDUCTION DES ISOMÉTRIES VECTORIELLES ET DES MATRICES ORTHOGONALES

Propriété

Si u est une isométrie de E et F stable par u , alors $F^\perp$ l'est.

Lemme

Si u est une isométrie de E , alors u possède une droite ou un plan stable.

Démonstration

Soit u admet une valeur propre réelle et par définition elle admet une droite stable.

Soit $\text{Sp } u = \emptyset$, le polynôme minimal μ_u de u n'a pas de racine réel, donc possède un facteur irréductible de degré 2 $P_0 = X^2 + aX + b$: $\mu_u = (X^2 + aX + b)Q$ avec $Q(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. On a donc $x \in E$ tel que $y = Q(u)(x) \neq 0_E$.

On a alors $P_0(u)(y) = P_0(u) \circ Q(u)(x) = \mu_u(u)(x) = 0_E$.

On montre que $F = \text{Vect}(y, u(y))$ est un plan stable par u .

C'est un plan car $y \neq 0_E$ et n'est pas vecteur propre de u .

Puis $u^2(y) = P_0(u)(y) - au(y) - by = -au(y) - by \in F$. $\square$

Lemme

Si u est une isométrie de E , alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Remarque

L'inclusion peut être stricte.

Si on a $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$, alors $\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ donc $|\lambda| = 1$. $\square$

Théorème : Réduction des isométries

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$. Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E , des entiers naturels m, p, q , des réels $\theta_1, \dots, \theta_m$ tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & \\ & R_{\theta_m} & & \\ & & -I_p & \\ & & & I_q \end{pmatrix}.$$

où, pour tout réel θ ,

$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Remarques

- R1** – Avec ces notations, u est une rotation si et seulement si p est pair.
- R2** – En remarquant que $R_{\pi} = -I_2$, on voit qu'on peut supposer $p \in [0, 1]$.

Théorème : Version matricielle

Soit M une matrice orthogonale ($M \in \mathcal{O}(n)$). Alors il existe une matrice $P \in \mathcal{O}(n)$ et une matrice Q de la forme ci-dessus telles que $M = P Q P^{-1} = P Q P^T$.

Démonstration

Par récurrence sur la dimension de E .

Initialisation : Si $\dim E = 1$, alors dans toute base orthonormale, u est représentée par une matrice de la forme (± 1) qui est bien de la forme voulue.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que le théorème soit vrai pour des espaces euclidiens de dimension au plus n , et soit E un espace euclidien de dimension au plus $n+1$.

Soit u possède une droite stable, on pose e_1 vecteur propre unitaire associé à une valeur propre, nécessairement ± 1 , $D = \text{Vect } e_1$, et $D^\perp$ est encore stable par u .

Alors $E = D^\perp \oplus D$ et dans une base adaptée (que l'on peut choisir orthonormale), la matrice de u est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & A & \\ & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

où A est la matrice dans une base orthonormale de $D^\perp$ de l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $D^\perp$ qui est encore une isométrie car conserve toujours la norme.

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et choisir la base en question de telle manière que A est la forme voulue.

Reste alors à éventuellement échanger deux vecteurs dans la base (si la valeur propre est -1) pour obtenir une matrice de u de la forme voulue.

Soit u ne possède pas de droite stable, donc pas de valeur propre réelle, mais alors il possède un plan stable P d'après le lemme préliminaire.

Dans une base orthonormale adaptée à la décomposition $P \oplus P^\perp = E$, la matrice de u est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où, comme dans le cas précédent, R et A sont de la forme voulue. Mais comme R est orthogonale en dimension 2, elle est nécessairement de la forme R_θ ou S_θ . Seule la première n'admet aucune valeur propre réelle ce qui permet de conclure. $\square$

X CAS DES DIMENSIONS 2 ET 3

1 Isométries en dimension 2

On a déjà vu que les matrices de $\mathcal{O}(2)$ sont exactement les matrices $R_\theta \in \mathcal{SO}(2)$ et $S_\theta \in \mathcal{O}^-(2)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
Nous allons décrire géométriquement les transformations correspondantes.

Propriété

Soit E euclidien orienté de dimension 2. $r \in \mathcal{SO}(E)$.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe, la matrice de r soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

On dit que r est la **rotation vectorielle d'angle de mesure θ** .

Démonstration

Si R_θ et R_ϕ sont des matrices de r en base orthonormale, alors on a $P \in \mathcal{SO}(2)$ tel que $R_\theta = P R_\phi P^{-1}$. Comme $\mathcal{SO}(2)$ est commutatif, $R_\theta = R_\phi$. $\square$

Propriété

Soit $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs non nuls de E . Il existe une unique rotation vectorielle transformant $\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ et $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}$.

Démonstration

Il suffit de passer par les complexes dans une base.

Définition : Angle orienté

On appelle **angle orienté** des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ non nuls de E euclidien orienté de dimension 2, l'angle de cette rotation, noté $(\vec{x}, \vec{y})$. Cela revient à se donner un nombre réel modulo 2π .

Propriété

Soient $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ des vecteurs non nuls de E euclidien orienté de dimension 2.

(i) $(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\widehat{(\vec{x}, \vec{y})})$.

(ii) $[\vec{x}, \vec{y}] = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin(\widehat{(\vec{x}, \vec{y})})$.

Propriété

Les isométries directes conservent les angles orientés tandis que les isométries indirectes les changent en leur opposé.

Démonstration

Avec le produit scalaire et le produit mixte.

Propriété : Isométries du plan

Soit E euclidien orienté de dimension 2.

- Les isométries directes sont les rotations vectorielles d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$, de matrice dans toute base orthonormale directe

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

et d'écriture complexe dans une telle base $z' = e^{i\theta} z$.

- Les isométries indirectes sont les réflexions. Dans une base orthonormale directe, la matrice d'une telle application est

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

où θ dépend de la base, son écriture complexe est $z' = e^{i\theta} \bar{z}$ et son axe est dirigé par le vecteur d'affixe $e^{i\theta/2}$ dans cette base.

Démonstration

- $z' = e^{i\theta} z$ s'interprète comme une rotation vectorielle.
- $z' = e^{i\theta} \bar{z}$ est une involution donc une symétrie vectorielle.

$$z' = z \iff e^{-i\theta/2} z \in \mathbb{R} \iff z \in \text{Re}^{i\theta/2}$$

et

$$z' = -z \iff e^{-i\theta/2} z \in i\mathbb{R} \iff z \in \text{Re}^{i(\theta/2 + \pi/2)} = (\text{Re}^{i\theta/2})^\perp$$

Donc il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite (donc réflexion) dirigée par $(\cos \theta/2, \sin \theta/2)$. $\square$



Méthode : Étudier une isométrie en dimension 2...

...donnée par sa matrice en base orthonormale directe. C'est une matrice orthogonale (les colonnes sont orthoNORMées). Elle est nécessairement de la forme R_θ ou S_θ .

- Soit elle est de la forme R_θ , c'est une rotation et on a directement l'angle de la rotation.
- Soit elle est de la forme S_θ et on sait que c'est une réflexion. Le plus simple est de retrouver son axe en calculant les vecteurs invariants.

2 Isométries en dimension 3

Propriété : Description des isométries en dimension 3

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, il existe une base orthonormale de E

dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Soit $u = r \in \mathcal{SO}(E)$ (rotation) et $r \neq \text{id}_E$, et alors $\dim \text{Ker}(r - \text{id}) = 1$ et $D = \text{Ker}(r - \text{id})$ est appelé **axe de la rotation**. On fixe a unitaire dirigeant D et (e_1, e_2) une base orthonormale de $P = D^\perp$. (e_1, e_2) est dite **directe** lorsque (e_1, e_2, a) l'est. On dit que D est **dirigée et orientée** par a .
On a $\theta \in \mathbb{R}$ tel que dans toute base orthonormale directe (e_1, e_2, a) adaptée à la décomposition $E = D^\perp \oplus D$, la

matrice de r est
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dit que θ est une mesure de l'angle de la rotation r (modulo 2π).

(ii) (Hors-Programme) Soit $u \in \mathcal{O}^-(E)$ et $u \neq -\text{id}_E$, de matrice en base orthonormale de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

composée commutative d'une rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et d'une réflexion de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

par rapport à un plan orthogonal à l'axe de la rotation (on parle d'anti-rotation).

Remarque

Et finalement, les isométries sont id_E , les rotations, les anti-rotations dont les réflexions font partie, et $-\text{id}_E$ (symétrie centrale).

Démonstration

On utilise le théorème de réduction des isométries.

Comme on est en dimension impaire, il y a nécessairement une valeur propre réelle, donc nécessairement ± 1 .

On a alors nécessairement une base orthonormale dans laquelle la matrice est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ (le bloc haut-gauche pouvant être éventuellement $\pm I_2$).

Si $u = r$ rotation, son déterminant vaut 1 et la matrice devient $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et 1 est valeur propre d'ordre 1 ou 3 (car

$\chi_r \in \mathbb{R}[X]$).

Si $r \neq \text{id}_E$, $\text{Ker}(r - \text{id}_E)$ est donc bien de dimension 1, et $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est la matrice dans n'importe quelle base orthonormale

directe de la rotation induite par r sur $P = D^\perp$ (c'est toujours une isométrie, elle est de déterminant 1).

D'où la bonne définition de l'angle de la rotation. $\square$

Propriété

Soit r est une rotation de E espace euclidien orienté de dimension 3 distincte de id_E .

- Son axe est l'ensemble de ses vecteurs invariants.
- Si θ est une mesure de son angle, alors $\text{tr } r = 2 \cos\theta + 1$.
- Le signe de $\sin\theta$ est celui du produit mixte $[x, r(x), a]$ où a est un vecteur directeur orientant l'axe (non nécessairement unitaire) et x un vecteur n'appartenant pas à l'axe (en général pris dans la base canonique).

Démonstration

Les deux premiers points sont faciles.

Pour le troisième, dans une base orthonormale directe $(e_1, e_2, a/\|a\|)$,

$$[x, r(x), a] = \begin{vmatrix} x_1 & \cos(\theta)x_1 - \sin(\theta)x_2 & 0 \\ x_2 & \sin(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2 & 0 \\ x_3 & x_3 & \|a\| \end{vmatrix} = \|a\| (x_1^2 + x_2^2) \sin(\theta) \quad \square$$



Méthode : Étude d'isométries en dimension 3

- Reconnaître une matrice orthogonale en étudiant l'orthonormalité de ses colonnes ou de ses lignes.
- Pour savoir si c'est une matrice orthogonale positive ou négative, une astuce simple permettant d'éviter le recours au déterminant : les colonnes étant orthonormées, on a nécessairement $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ où $\pm$ est le signe de l'isométrie. Il suffit alors de calculer une composante de ce produit vectoriel pour conclure.
- Si elle est positive, c'est une rotation (sans doute différente de l'identité). On détermine l'axe en cherchant les vecteurs invariants, et on l'oriente à l'aide d'un vecteur directeur, puis on cherche l'angle en utilisant la propriété précédente.
- Si elle est négative, c'est $-\text{Id}_E$ ou une réflexion, sinon c'est hors-programme. Dans le deuxième cas, cela se voit matriciellement en base orthonormale avec une matrice orthogonale symétrique (voir TD). Il suffit alors de calculer ses vecteurs invariants pour la caractériser.
- Ne pas oublier qu'on ne travaille pas toujours dans $\mathbb{R}^3$: après une étude matricielle, revenir à l'espace initial.

Exercice

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ munit de sa structure euclidienne canonique et de son orientation habituelle de la rotation d'axe $D: x = y = z$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

$a = (1, 1, 1)$ dirige l'axe de la rotation.

Son orthogonal est $P: x + y + z = 0$ dirigé par $b = (1, 0, -1)$ et $c = (1, -2, 1)$, ils sont orthogonaux.

D'où une base orthonormale adaptée de $\mathbb{R}^3$: $(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a)$.

Dans cette base, la matrice de la rotation est $M = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice recherchée est alors PMP^T où $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique à

$(\frac{1}{\sqrt{2}}b, \frac{1}{\sqrt{6}}c, \frac{1}{\sqrt{3}}a)$.

La matrice recherchée est alors $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice

Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à

$$M = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes sont orthonormées $C_1 \wedge C_2 = +C_3$ avec la première coordonnée : c'est une matrice de rotation.

On calcule les vecteurs invariants, on trouve $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ donc $a = (1, 0, -4)$ dirige et oriente l'axe de la rotation.

Puis $\text{tr } M = -7/9 = 2 \cos \theta + 1$ donc $\cos \theta = -8/9$.

Et le signe de $\sin \theta$ est celui de $\begin{vmatrix} 1 & -7 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} < 0$.

Donc rotation d'angle $-\text{Arccos}(-8/9)$.