

Les produits scalaire usuels.

• Sur $\mathbb{R}^n$: $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

• Sur $M_n(\mathbb{R})$: $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$$

• Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: $\forall f, g$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Norme

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire

Alors l'app: $\|\cdot\|: x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$

est une norme sur E .

Inégalité triangulaire

$\forall x, y \in E$:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité $\Leftrightarrow x = \lambda y$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\|$$

Produit scalaire et
Norme sur E

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace préhilbertien

$\forall x, y \in E$:

$$\textcircled{1} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

$$\textcircled{2} \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

$$\textcircled{3} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

identité du parallélogramme

Identité de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

Inégalité de Cauchy Schwarz

$$\forall x, y \in E: |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Il y a égalité c.a.d:

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$$

si et seulement si x et y sont liés

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}; y = \lambda x$$

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$(v_1, \dots, v_n)$ est une famille orthogonale
 $\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall i \neq j$

$(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormale si
 $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls
 (En particulier toute famille orthonormale)
 est libre.

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G, F \perp G$$

$F = G^\perp$ et $G = F^\perp$
 $\Rightarrow$ Si F admet un supplémentaire orthogonale, alors il est unique $= F^\perp$

Si $\dim F < \infty$, alors $E = F \oplus F^\perp$
 $\Rightarrow F^{\perp\perp} = F$

Si $\dim E < \infty$, alors $\forall F \leq E$
 $E = F \oplus F^\perp \Rightarrow \begin{cases} \dim F^\perp = \dim E - \dim F \\ F^{\perp\perp} = F \end{cases}$

Si $(v_1, \dots, v_n)$ est orthogonale, alors
 $\|\sum_{i=1}^n v_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$

$$A^\perp = (\text{vect}(A))^\perp$$

Soit ACE

$A^\perp = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A\}$

Si $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$, alors
 $x \in F \Leftrightarrow \langle x, e_i \rangle = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$A^\perp$ est un s.c. de E

orthogonalité dans un
 espace préhilbertien
 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

$$E^\perp = \{0_E\}; \{0_E\}^\perp = E$$

Si $F = \text{vect}(A)$ avec ACE

Alors $x \in F^\perp \Leftrightarrow \langle x, a \rangle = 0, \forall a \in A$

Soit F et G deux s.c. de E
 $F \perp G \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in F, \forall y \in G$

$$F \cap G = \{0_E\}$$

$$F \perp G \Leftrightarrow F \subseteq G^\perp \Leftrightarrow G \subseteq F^\perp$$

$$F \perp F^\perp \Rightarrow \begin{cases} F \cap F^\perp = \{0_E\} \\ F \subseteq F^{\perp\perp} \end{cases}$$

Si $F \subseteq G$
 Alors $G^\perp \subseteq F^\perp$

Si $\dim E = n$
 et $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une
 une famille orthonormale
 Alors B est une
 BON de E

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ une
 BON de E , alors
 $\forall x \in E; \forall y \in E$

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$$

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$$

Def: Famille totale.

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille d'éléments de E .

On dit que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille **totale**

$$\text{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}^{\|\cdot\|_2} = E$$

Théorème:

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille **orthonormale totale** de E .

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \text{vect}\{e_k, 0 \leq k \leq n\}$
et P_n : projection orthogonale sur F_n .
Alors $\forall x \in E$

$$i) \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - P_n(x)\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = x \quad \|\cdot\|_2$$

$$ii) \forall x \in E, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n \quad (\text{pour } \|\cdot\|_2)$$

$$iii) \text{La s. } \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \text{ cv et}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

Procédé d'orthogonalisation de Schmidt et Famille totale

N.B pour construire une famille orthogonale.

On pose.

$$\forall k \in \mathbb{N}, v_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle e_k, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

Dans ce cas

$$P_B \rightarrow B' =$$



Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

$(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E

Alors il existe $(v_1, \dots, v_n)$ une famille

orthonormale de E vérifiant

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \text{vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{vect}(v_1, \dots, v_k)$$

Donnée par l'algorithme suivant:

$$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|_2}, \quad v_k = \frac{e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, v_i \rangle v_i}{\|e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, v_i \rangle v_i\|_2}, \quad \forall k \in \{2, \dots, n\}$$

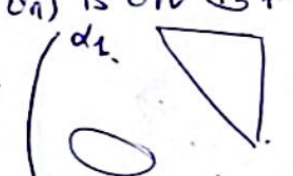
Soit $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$

$B = (e_1, \dots, e_n)$ base de F

$B' = (v_1, \dots, v_n)$ B.O.N. de F

Alors.

$$P_B \rightarrow B' =$$



$$\alpha_1 = \frac{1}{\|e_1\|_2} > 0$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\|e_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_k, v_i \rangle v_i\|_2} > 0$$

• Toute espace euclidien admet une B.O.N.

• Toute famille orthonormale d'un espace euclidien E , peut être complétée en une B.O.N. de E .