

Def: $\forall x \in E, \|U(x)\| = \|x\|$.

$\forall x, y \in E: \langle U(x), U(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

U conserve le produit scalaire

$Sp(U) \subset \{-1, 1\}$
 $\cdot \det U \in \{-1, 1\}$

(F stable par U)
 $F^\perp$ stable par U

Si F stable par U
 Alors $U|_F$ est orthogonal

Si U est orthogonal
 Alors $\forall B = (e_1 - e_n)$
 une B.O.N.
 $\Rightarrow U(B) = (U(e_1) - U(e_n))$
 est une B.O.N.

$O(E) = \{U \in \mathcal{L}(E); U \text{ orthogonal}\}$

$O(E), 0$ est sous-groupe compact de $GL(E, 0)$

$U \in O(E) \Rightarrow U$ bijective et $U^{-1} \in O(E)$

U et $V \in O(E) \Rightarrow UV \in O(E)$

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien.
 $U \in \mathcal{L}(E)$
 U endo-orthogonal = isométrie vectorielle.

isométrie vectorielle

$U \in \mathcal{L}(E)$ et
 $\exists B = (e_1 - e_n)$ une B.O.N.
 $\text{sq } U(B) = (U(e_1) - U(e_n))$
 une B.O.N. Alors
 U est orthogonal

ΔF : Symétrique, orthogonal.

$B = B.O.N$
 L'app. $\Phi(O(E), 0) \rightarrow (p_n(\mathbb{R}), *)$
 $U \mapsto \text{Mat}(U, B)$

est un isomorphisme de groupe.

dim $E = 3$

$U \in O_3^+(\mathbb{R})$ et $U \neq \text{id}$ ($\det U = 1$)

$\exists B, B.O.N$ de $E \Leftrightarrow$
 $\text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

$U =$ rotation d'axe dirigé par
 $D = \ker(U - \text{id}_E)$.

Théorème: Réduction des isométries

$U \in O(E) \Leftrightarrow \exists B$ une B.O.N.
 $\exists p, q, k \in \mathbb{N}; \theta_1, \dots, \theta_k \in]0, 2\pi[$ tq

$\text{sq } \text{Mat}(U, B) = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & & \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ & & & \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$

avec $R_{\theta_k} = \begin{pmatrix} I_p & -I_q & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$

$\text{Mat}(U, B)$ est une matrice orthogonale

