

Déf F un s.e.v de E ($\dim F < \infty$)
 $E = F \oplus F^\perp$

On appelle projection orthogonale sur F c'est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$

$\forall x \in E; x = x_F + x_{F^\perp}$
 $P_F(x) = x_F$

$\text{Im } P_F = \ker(P_F - \text{id}_E) = F$

$\ker P_F = F^\perp$

$\text{Im } P_F \oplus \ker P_F = E$

$\forall x \in E; P_F(x) \in F$
 et $x - P_F(x) \in F^\perp$

$\Rightarrow \langle x - P_F(x), y \rangle = 0, \forall y \in F$

$\langle x - P_F(x), P_F(x) \rangle = 0$

$\langle x, P_F(x) \rangle = \langle P_F(x), P_F(x) \rangle$

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ B.O.V de F

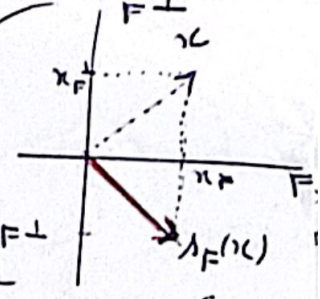
Alors $P_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$

$\forall x \in E; d(x, F)$ est atteint en l'unique valeur qui est $P_F(x)$

$d(x, F) = \|x - P_F(x)\|$

$\forall y \in F; \|x - P_F(x)\| \leq \|x - y\|$

Déf $\dim F < \infty$ $E = F \oplus F^\perp$
 on appelle symétrie orthogonale / à F
 c'est la symétrie / à $F //$ à $F^\perp$



$\forall x \in E; x = x_F + x_{F^\perp}$
 $\Delta_F(x) = x_F - x_{F^\perp}$

$F = \{x \in E; \Delta_F(x) = x\}$

$F = \ker(\Delta_F - \text{id}_E)$

$F^\perp = \{x \in E; \Delta_F(x) = -x\}$

$F^\perp = \ker(\Delta_F + \text{id}_E)$

$E = \ker(\Delta_F + \text{id}_E) \oplus \ker(\Delta_F - \text{id}_E)$

Projection et symétrie orthogonales dans un

Pythagore

$\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2$

$\|P_F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$

$\Rightarrow \|P_F(x)\| \leq \|x\|$

Inégalité de Bessel

Soit p un projecteur ($p \circ p = p$)

p projecteur orthogonal

$\text{Im } p \perp \ker p$

p est symétrique

$\lambda \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie orthogonale

so $\lambda = \text{id}_E$ et $\ker(\lambda - \text{id}_E) \perp \ker(\lambda + \text{id}_E)$

$\forall x \in E; \Delta_F(x) + x = 2P_F(x)$
 $\Leftrightarrow \Delta_F = 2P_F - \text{id}_E$

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien
 $\lambda \in \mathcal{L}(E)$

λ symétrique orthogonale

λ est orthogonale

λ est symétrique

$S(E) \cap O(E) = \{ \text{symétrique orthogonale} \}$