

Espace Préhilbertien Réel et Espace Euclidien

Dans tout ce chapitre, on considère E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Espace préhilbertien réel

* Produit scalaire

- On appelle **produit scalaire réel**, toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} * \varphi \text{ est linéaire par rapport à la 1^{re} variable (ou 2^{eme} variable)} \\ * \varphi(x, y) = \varphi(y, x), \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad (\varphi \text{ est symétrique}) \\ * \varphi(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in E \quad (\varphi \text{ est positive}) \\ * \text{Si } \varphi(x, x) = 0, \text{ alors } x = 0 \quad (\varphi \text{ est définie}) \end{cases}$$

Le produit scalaire φ sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou bien $(\cdot, \cdot)$.

- On appelle **espace préhilbertien réel**, tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire réel et on le note $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

- Si $\dim E < \infty$, on dit que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un **espace euclidien**.

Exemples usuels

1) Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$

l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2) Produit scalaire sur $C([a, b], \mathbb{R})$

Soit $C([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}\}$.

L'application

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est un produit scalaire sur $C([a, b], \mathbb{R})$.

3) Produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$$

est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

* Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Applications

1) On muni $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left| \sum_{k=0}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=0}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2) $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Norme euclidienne

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors E est un espace vectoriel normé muni d'une norme, associée au produit scalaire, définie par :

$$N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto N(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

N est appelé norme euclidienne.

Proposition

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire, alors :

- 1) $\forall x, y$ dans E , $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.
 - 2) $\forall x, y$ dans E , $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$.
- On en déduit
- i) $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$.
 - ii) $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$.

Remarque

$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ ssi x et y sont liées

$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi x et y sont positivement liés.

et $\|\cdot\|$ la norme associée.

Famille orthogonale et famille orthonormale

Dans toute cette partie $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel

Définition

* Soit $x \in E$. On dit que x est un vecteur unitaire si $\|x\| = 1$.

Soient $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$ si $\langle x, y \rangle = 0$.

Définition

Soit $p \in \mathbb{N}^*$

i) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs non nuls de E .

• On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est orthogonale.

si $\forall i \neq j$, $e_i \perp e_j$ ($\langle e_i, e_j \rangle = 0$)

• On dit que la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est **orthonormale** (ou bien

orthonormée) si

$$e_i \perp e_j, \forall i \neq j$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e_i \perp e_j, \forall i \neq j \\ \|e_i\| = 1 \forall i \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right. \iff \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

ii) Si $\dim(E) < \infty$.

• On dit que $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une **base orthogonale** de E Si B est une base de E et la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthogonale.

• On dit que $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une **base orthonormée** (on note B.O.N) de E Si B est une base de E et la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est orthonormale.

* Proposition

Si $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ ($p \in \mathbb{N}^*$) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E , alors elle est libre.

Conséquences

Si $\dim E < \infty$

1) $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthogonale (resp. orthonormale) de E , si et seulement si B est une famille orthogonale (resp. orthonormale) de vecteurs non nuls de E et $\text{card}(B) = \dim E$.

2) Si $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de E , alors $B' = (\frac{e_1}{\|e_1\|}, \frac{e_2}{\|e_2\|}, \dots, \frac{e_n}{\|e_n\|})$ est une base orthonormale de E .

* Formule de Pythagore

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1) Soit $x, y \in E$.

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Si $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille orthogonale de E , alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2.$$

* Théorème "Orthogonalisation de Schmidt"

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E . Alors il existe $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une famille orthonormale de E telle que

$$\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_k) = \text{vect}(v_1, v_2, \dots, v_k), \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

* Procédé d'orthogonalisation de Schmidt

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille libre de E

On pose $u_1 = e_1$

$u_2 = e_2 + \alpha_1 u_1$ tel que $u_1 \perp u_2$, alors $u_2 = e_2 - \frac{\langle u_1, e_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1$

ainsi, on construit par récurrence u_k , $1 \leq k \leq n$ tel que $u_k = e_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j u_j$ avec $u_k \perp u_j \quad \forall 1 \leq j \leq k-1$. Alors $\alpha_j = -\frac{\langle u_j, e_k \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle}$

Ainsi $\forall 1 \leq k \leq n$, $u_k = e_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_j, e_k \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} u_j$

La famille $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ ainsi construite est orthogonale.

On pose pour tout $1 \leq j \leq n$ $v_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$. Alors la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est orthonormale.

Espace Euclidien

* Théorème

i) Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace euclidien ($\dim E < \infty$), alors E admet au moins une B.O.N.

ii) Toute famille orthonormée de E peut être complétée pour obtenir une B.O.N.

* Ecriture dans une B.O.N.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une B.O.N. $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$; alors

i) $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$

$$\langle (e_i)_{i=1}^n, x \rangle = \langle (e_i)_{i=1}^n, \sum_{j=1}^n \langle e_j, x \rangle e_j \rangle = \sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle = \langle e_i, x \rangle$$

ii) Soit $x \in E$, tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ($Mat(x, B) = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$), alors

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = {}^t X X$$

iii) Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^t X Y \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Si $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base quelconque de E , alors pour tout

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^n y_i e_i, \text{ alors}$$

$$\langle x, y \rangle = {}^t X M Y \text{ avec } M = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Proposition

Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une B.O.N. de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $Mat(u, B) = A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$$

Orthogonal d'une partie

Soit $A \subset E$, on appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$ la partie de E définie par :

$$A^\perp = \{x \in E \text{ tel que } \langle x, a \rangle = 0, \forall a \in A\}$$

Proposition

Soit A une partie non vide de E , alors $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de E

Propriétés

Soient A et B deux parties de E .

- $A \subset A^{\perp\perp}$.
- Si $A \subset B$, alors $A^\perp \subset B^\perp$.
- $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$.
- Si $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$, alors $F^\perp = F^\perp$ si et seulement si $\langle x, e_i \rangle = 0 \forall i \in \{1, \dots, p\}$.

Sous espaces orthogonaux

Soit F et G deux sous espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont orthogonaux et on note $F \perp G$ si $\forall x \in F$ et $\forall y \in G$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Propriétés

- $F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$
- $F \perp F^\perp$.
- a) Si $F \perp G$, alors $F \cap G = \{0_E\}$.
b) $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

* Somme orthogonale de s.e.v orthogonaux

Soient $(E, < \dots >)$ un espace préhilbertien réel.

1) Soit F et G deux s.e.v. orthogonaux de E , alors $F + G = F \oplus G$.
On note $F \oplus^\perp G$.

2) Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des s.e.v. de E deux à deux orthogonaux.
Alors $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$.

* Définition

Soient $(E, < \dots >)$ un espace préhilbertien réel, F et G deux s.e.v. de E .

On dit que F et G sont supplémentaires orthogonaux si

$$E = F \oplus^\perp G$$

Remarque

Si $E = F \oplus^\perp G$, alors $F \perp G \implies G = F^\perp$.

* Théorème

Soient $(E, < \dots >)$ un espace préhilbertien réel et F un s.e.v. de E tel que $\dim F$ est finie, alors

$$E = F \oplus F^\perp \text{ et } F^{\perp\perp} = F$$

* Corollaire

Soit $(E, < \dots >)$ un espace euclidien, alors pour tout sous espace vectoriel F de E on a

- $E = F \oplus^\perp F^\perp$.
- $F^{\perp\perp} = F$.
- $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

* Proposition

Soient $(E, < \dots >)$ un espace euclidien, F et G deux s.e.v. de E . Alors

- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

* Projecteur orthogonal

Soit $(E, < \dots >)$ un espace préhilbertien réel.

1) On appelle **projecteur orthogonal** de E , tout projecteur P de E ($P^2 = P$) vérifiant $\text{Im } P \perp \ker P$.

2) Soit F un s.e.v. de E tel que $E = F \oplus F^\perp$. Soit P_F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$, c.à.d. On appelle **projection orthogonale** sur F et on note P_F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

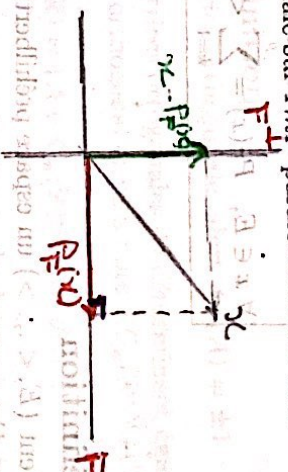
3) P est un projecteur orthogonal si et seulement si P est une projection orthogonale sur $\text{Im } P$ parallèlement à $\ker P$.

* Propriétés

- $\text{Im } P_F = \ker(P_F - \text{id}_E) = F$ et $\ker P_F = F^\perp$
- $P_F + P_{F^\perp} = \text{id}_E$
- $\forall x \in E, x = P_F(x) + (x - P_F(x))$
 $P_F(x) \in F$ et $(x - P_F(x)) \in F^\perp$.

On déduit :

i) $\langle P_F(x), x - P_F(x) \rangle = 0$ ii) $\langle x - P_F(x), y \rangle = 0, \forall y \in F$.



4) P est un projecteur orthogonal $\iff P \circ P = P$ et $\ker(P_F - id_E) \perp \ker P_F$.

Proj orthogonal sur un s.e.v de dimension finie
 Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un s.e.v de E de dimension finie ($\dim(F) = p$)
 On considère $B = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une B.O.N. de F et on note P_F la projection orthogonale sur F . Alors

$$\forall x \in E, P_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle e_k, x \rangle e_k$$

Définition

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel F un s.e.v de E et $x \in E$.
 On appelle distance de x à F et on note $d(x, F)$ le réel défini par :

$$d(x, F) = \inf \{ \|x - y\|, y \in F \}$$

Proposition

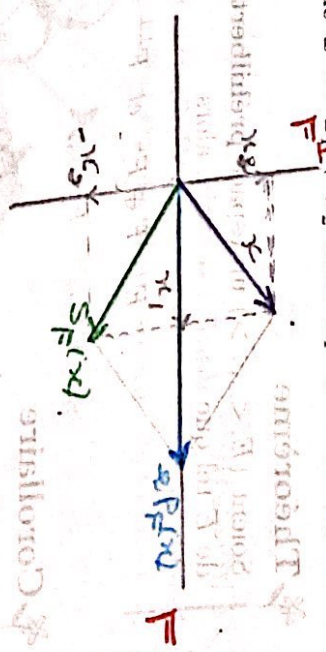
Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel F un s.e.v de E de dimension finie et P_F la projection orthogonale sur F , alors
 i) $\forall x \in E, d(x, F) = \|x - P_F(x)\|$

- ii) $\|x - P_F(x)\| \leq \|x - y\|, \forall y \in E$.
- iii) $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2, \forall x \in E$.
- vi) $\|P_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ "Inégalité de Bessel"

$$\iff \sum_{k=1}^p (\langle e_k, x \rangle)^2 \leq \|x\|^2$$

Symétrie orthogonale

Soit F un s.e.v de E tel que $E = F \oplus F^\perp$.
 On appelle symétrie orthogonale par rapport à F et on note S_F la symétrie par rapport F parallèlement à $F^\perp$ c.à.d
 $\forall x \in E$, tel que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$,
 $S_F(x) = x_1 - x_2$



Propriétés

- 1) $\ker(S_F - id_E) = F$ et $\ker(S_F + id_E) = F^\perp$
- 2) S est une symétrie orthogonale $\iff S^2 = id_E$ et $\ker(S_F - id_E) \perp \ker(S_F + id_E)$.
- 3) On a : $S_F(x) + x = 2x_1 = 2P_F(x), \forall x \in E$, d'où

$$S_F + id_E = 2P_F$$

Famille totale d'un espace vectoriel de dimension infinie.
 Dans ce paragraphe E est un espace préhilbertien réel de dimension infinie muni de sa norme euclidienne.

* Définition

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de E .

On dit que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans E si le sous espace vectoriel $\text{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E pour la norme euclidienne $\iff$

$$E = \overline{\text{vect}\{e_n, n \in \mathbb{N}\}}.$$

* Théorème

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormale totale de E .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = \text{vect}\{e_k, 0 \leq k \leq n\}$ et on considère P_n la projection orthogonale sur F_n . Alors pour tout $x \in E$,

- i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - P_n(x)\| = 0.$
- ii) $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle e_n.$
- iii) $\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \langle e_n, x \rangle^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

Matrice orthogonale

* Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est une matrice orthogonale si ${}^t A \cdot A = I_n$.

On notera $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

* Propriétés

- i) $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff {}^t A \cdot A = I_n \iff A^t A = I_n \iff A^{-1} = {}^t A.$
- ii) $\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \bullet I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ \bullet \text{Si } A \text{ et } B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \text{ alors } AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ \bullet \text{Si } A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \text{ alors } A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \end{array} \right. \iff$
 $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous groupe de $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \times).$
- iii) On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique.
 On considère $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors les vecteurs colonnes (resp. les vecteurs lignes) de A forment une B.O.N. de $\mathbb{R}^n$
- iv) La matrice de passage d'une B.O.N. à une B.O.N. est une matrice orthogonale

* Proposition-Définition

- i) Soit A une matrice orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1.$
- ii) L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égale 1 est appelé groupe spécial orthogonal et sera noté $SO_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$).
 $SO_n(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \det(A) = 1\}.$
- iii) L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égale -1 sera noté $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.
 $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \det(A) = -1\}.$
- vi) $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_n^+(\mathbb{R}) \cup \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$

Proposition

- i) $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe compact de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.
- ii) $O_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.
- iii) $(O_n^+(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe compact.

Proposition

- i) Une matrice $M \in O_2^+(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

- ii) Une matrice $N \in O_2^-(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$N = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Endomorphisme remarquables d'un espace Euclidien
 Dans toute cette partie on considère $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien.

Endomorphisme Symétrique

Définition

Soient $(E, < \cdot, \cdot >)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.
 On dit que f est un endomorphisme symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad < f(x), y > = < x, f(y) >$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques.

Exemple.

Soit p un projecteur. Alors

P est un projecteur orthogonal $\iff P$ est un endo symétrique.

Soit S une symétrie. Alors

S est une symétrie orthogonale $\iff S$ est un endo symétrique.

Proposition

Soit f un endomorphisme symétrique, alors

- i) $\text{Im}(f) = (\ker(f))^\perp$
- ii) $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

Proposition

Soit f un endomorphisme de E .

f est un endomorphisme symétrique si et seulement si $\text{Mat}(f, B)$, la matrice de f dans une B.O.N. B est une matrice symétrique.

Conséquence.

- i) L'application $\varphi : \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
 $f \mapsto \text{Mat}(f, B)$ est un isomorphisme.

- ii) $\dim(\mathcal{S}(E)) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition

Soient f un endomorphisme symétrique de E , alors

- 1) Le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$ (c à d $\text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$.)
- 2) Les sous espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

Proposition

Soient u un endomorphisme symétrique de E et F un s.e.v de E . F est un sous espace stable par u si et seulement si $F^\perp$ est aussi stable par u .

De plus les endomorphismes induits par u sur F et $F^\perp$, u_F et $u_{F^\perp}$ sont encore des endomorphismes symétriques.

Théorème Spectral

Soient u un endomorphisme de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de f deux à deux distincts. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- u est un endomorphisme symétrique de E .
- $E = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} E_{\lambda_k}(u)$.
- u admet une base orthonormale formée de vecteurs propres de u (c à d, u est diagonalisable dans une B.O.N)
- Il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et une matrice orthogonale $P \in O_n(R)$ tels que $\text{Mat}(u, B) = PD^tP$. (P est la matrice de passage de la base B.O.N à la base orthonormale formée de vecteurs propres de u , alors P est orthogonale).

Version matricielle

Pour toute matrice symétrique réelle, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale $P \in O_n(R)$ tels que $A = PD^tP$.

Isométrie vectorielle d'un espace euclidien

Soit f un endomorphisme de E .
On dit que f est un endomorphisme orthogonal (ou isométrie vectorielle) s'il conserve la norme c.a.d

$$\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|.$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux.

Conséquence

Si f est un endomorphisme orthogonal, alors f est bijective.

Exemples

- $\text{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$.
- Soit F un s.e.v de E et S_F la symétrie orthogonale par rapport à F . Alors $S_F \in \mathcal{O}(E)$.
- Notons que P_F la projection orthogonale sur F n'est pas orthogonale.

Proposition

Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $Sp(f) \subset \{-1, 1\}$

Proposition

- $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$
- $\text{Id}_E \in \mathcal{O}(E)$
- Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, alors f est bijective et $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.
- Soient f et $g \in \mathcal{O}(E)$, alors $f \circ g \in \mathcal{O}(E)$.

$\iff (\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de l'ensemble $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ des bijections de E muni de la loi $\circ$.

Proposition

Soit f un endomorphisme orthogonal, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- $f \in \mathcal{O}(E)$ (conserve la norme).
- $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ (conserve le produit scalaire).
- f transforme une B.O.N. en une B.O.N.
- La matrice de f dans une B.O.N. est orthogonale.

1.

Conséquences

1) Soient $f \in \mathcal{O}(E)$, x et y dans E .

$$x \perp y \text{ si et seulement si } f(x) \perp f(y)$$

2) Soit B une B.O.N. de E . Alors

$$\varphi : \mathcal{O}(E) \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

3) $\mathcal{O}(E)$ est un groupe compact.

Proposition

Soient u un endomorphisme orthogonal de E et F un s.e.v. de E . F est un sous espace stable par u si et seulement si $F^\perp$ est aussi stable par u .

De plus les endomorphismes induits par u sur F et $F^\perp$, $u|_F$ et $u|_{F^\perp}$ sont encore des endomorphismes orthogonaux.

Réduction d'une isométrie vectorielle

Rotation vectorielle

On appelle rotation vectorielle d'angle $\theta \in]0, 2\pi[$ et on note R_θ tout endomorphisme orthogonal de E dont la matrice dans une base orthonormale directe de E est de la forme $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Théorème

Soit $u \in \mathcal{O}(E)$, un endomorphisme orthogonal, alors il existe B une B.O.N. de E dans laquelle la matrice de u s'écrit par blocs sous la forme :

$$Mat(u, B) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{\theta_k} & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_p} & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & R_{\theta_q} \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$$

avec p, k et $q \in \mathbb{N}$ ($p + q + 2k = n$) et R_{θ_i} sont des matrices de rotation : $\forall i \in \{1, \dots, k\}$