

Problème " Matrice de Gram"

Partie I.

On considère un entier $n \geq 2$ et deux suites finies $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m , associé aux familles $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$, est le nombre, noté Δ_m , égal au déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i, j \leq m}$.

1. On suppose qu'il existe $(i_1, i_2) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i_1 \neq i_2$, tel que $a_{i_1} = a_{i_2}$. Justifier que $\Delta_n = 0$.

On suppose désormais que les réels $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts et on considère la fraction rationnelle

$$R(X) = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (X - b_j)}{\prod_{k=1}^n (X + a_k)}.$$

2. Justifier que les polynômes $\prod_{k=1}^{n-1} (X - b_k)$ et $\prod_{k=1}^n (X + a_k)$ de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux.

3. a) Préciser les pôles de la fraction rationnelle R et vérifier qu'ils sont tous simples.

b) En déduire que la décomposition en éléments simples, dans $\mathbb{R}(X)$, de la fraction R est de la forme

$$R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{X + a_k}$$

en précisant les expressions des réels α_k en fonction des a_k et des b_k .

4. Application au calcul de Δ_n .

a) Montrer que

$$\alpha_n \Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1} + b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1} + b_n} \\ R(b_1) & \cdots & R(b_n) \end{vmatrix}.$$

- b) En déduire que $\alpha_n \Delta_n = R(b_n) \Delta_{n-1}$.

c) Calculer Δ_2 puis montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

Partie II : Matrice et déterminant de Gram.

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel ; son produit scalaire sera noté $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée se notera $\|\cdot\|$. Si F est un sous-espace vectoriel de E , de dimension finie, p_F désigne la projection orthogonale sur F .

Soit p un entier ≥ 2 . Pour toute famille $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$, on note $Gram(u_1, \dots, u_p) = ((u_i|u_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ la matrice de $M_p(\mathbb{R})$ de terme général $(u_i|u_j)$. La matrice $Gram(u_1, \dots, u_p)$ s'appelle la *matrice de Gram* des vecteurs $u_1, \dots, u_p$; le déterminant de cette matrice, noté $G(u_1, \dots, u_p)$, s'appelle *déterminant de Gram*.

1. Cas $p = 2$

Soit $(u_1, u_2) \in E^2$. Justifier que $G(u_1, u_2) \geq 0$ et que $G(u_1, u_2) = 0$ si, et seulement si, la famille (u_1, u_2) est liée.

2. Vérifier que, pour tout $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$, la matrice $Gram(u_1, \dots, u_p)$ est une matrice symétrique.

3. Cas d'une famille liée

a) Soit $i \in \{1, \dots, p\}$ et soit $(\lambda_j)_{j \neq i}$ une famille quelconque de $p - 1$ réels ; on pose $w_k = u_k$ si $k \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i\}$ et $w_i = u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j$. Montrer que $G(w_1, \dots, w_p) = G(u_1, \dots, u_p)$.

b) En déduire que si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée, alors $G(u_1, \dots, u_p) = 0$.

4. Cas d'une famille libre

On considère une famille libre $(u_1, \dots, u_p)$ d'éléments de E et on note $(e_1, \dots, e_p)$ une B.O.N du s.e.v $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$. Soit B la matrice formée des coefficients des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ dans la base B.O.N $(e_1, \dots, e_p)$ a) Montrer que $Gram(u_1, \dots, u_p) = {}^t B B$.

b) Déduire que $G(u_1, \dots, u_p) > 0$.

5. Application au calcul de la distance 'a un sous-espace vectoriel

On considère un sous-espace vectoriel F de E , de dimension finie $n \geq 2$, et on note $(v_1, \dots, v_n)$ une base quelconque de F .

a) Montrer que, pour tout $x \in E$

$$G(v_1, \dots, v_n, x) = G(v_1, \dots, v_n, p_F(x)) + \|x - p_F(x)\|^2 G(v_1, \dots, v_n).$$

b) En déduire que, pour tout $x \in E$, la distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F , notée $d(x, F)$, est donnée par :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(v_1, \dots, v_n, x)}{G(v_1, \dots, v_n)}}.$$

6. Un exemple de matrice de Gram

Soit n un entier naturel ≥ 2 ; on note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire canonique. On note A_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = \min(i, j)$ pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, et on considère les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de $\mathbb{R}^n$ définis par :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad v_k = \sum_{i=1}^k e_i.$$

a) Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

b) Calculer le produit scalaire $\langle v_i, v_j \rangle$, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$; en déduire que A_n est une matrice de Gram.

c) Montrer que la matrice A_n est orthogonalement diagonalisable et que ses valeurs propres sont strictement positives.

Partie III Application au calcul d'un minimum

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'élément X^k de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ sera noté P_k ; en particulier, $P_0 = 1$.

On considère l'application $(\cdot, \cdot)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t) dt, \quad (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2.$$

$(P|Q)$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire.

2. Calcul d'une distance.

Soit p un entier ≥ 2 et soit $(n_k)_{1 \leq k \leq p}$ une suite finie d'entiers naturels deux à deux distincts.

a) Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$, exprimer le produit scalaire $(P_{n_i}|P_{n_j})$ en fonction de n_i et n_j .

b) En utilisant les résultats de la première partie, exprimer le déterminant de la matrice de Gram $Gram(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$ en fonction des entiers $n_1, \dots, n_p$.

c) Montrer que $(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

d) On note $\mathcal{W}_p$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ engendré par la famille $(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$. Montrer que, pour tout entier naturel r ,

$$d(P_r, \mathcal{W}_p) = \frac{1}{\sqrt{2r+1}} \prod_{k=1}^p \frac{|n_k - r|}{n_k + r + 1}.$$

3. Soit n un entier ≥ 2 et soit $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \psi(a_1, \dots, a_n) = \int_0^1 (1 - a_1 t - \dots - a_n t^n)^2 dt.$$

a) À l'aide d'une interprétation euclidienne, montrer qu'il existe un unique point $(a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que l'application ψ atteigne son minimum, autrement dit

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \psi(x_1, \dots, x_n).$$

b) Calculer $\psi(a_1, \dots, a_n)$ en fonction de n .